

Atcoder Rugular Contest 124

[比赛链接](#)

D - Yet Another Sorting Problem

题意

给定一个 $n+m$ 的排列，每次可以选取一个位置位于 $1 \sim n$ 的元素和一个位置位于 $n+1 \sim n+m$ 的元素交换位置。

问使得排列有序的最小操作次数。

题解

将排列分解成若干置换环，则对于每个交换操作，等价于选取 $1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq n+m$ 将 i 到 p_i 变为 i 到 p_j ， j 到 p_i 。

不难发现如果 i, j 属于同一个置换环则环分裂，否则两个环合并。

同时将前 n 个位置染黑，后 m 个位置染白，于是每次操作需要选中一个黑点和一个白点进行操作。

设 A_i 表示第 i 次操作后大小至少为 2 的纯黑色环个数， B_i 表示第 i 次操作后大小至少为 2 的纯白色环个数， C_i 表示第 i 次操作后置换环个数。

定义势能函数 $f(i) = n + m - C_i + 2 \max(A_i, B_i)$ 。不难发现 $|C_{i+1} - C_i| = 1, |A_{i+1} - A_i| \leq 1, |B_{i+1} - B_i| \leq 1$ 。

同时有 $(C_{i+1} - C_i)(A_{i+1} - A_i) \geq 0, (C_{i+1} - C_i)(B_{i+1} - B_i) \geq 0$ 于是有 $f(i+1) \geq f(i) + 1$ 。

终态 $A_z = B_z = 0, C_z = n + m$ 于是有 $f(Z) = 0$ 。最小操作次数不小于 $f(0) - f(Z) = n + m - C_0 + 2 \max(A_0, B_0)$ 。

下面证明下界可以取到：

首先如果 $A_i > 0, B_i > 0$ 可以选取一个纯黑环和一个纯白环合并，这样 $A_{i+1} - A_i = B_{i+1} - B_i = C_{i+1} - C_i = -1, f(i+1) = f(i) - 1$ 。

若 $A_i > 0, B_i = 0$ 可以选取一个纯黑环和一个含白点的环合并，这样 $\max(A_{i+1}, B_{i+1}) - \max(A_i, B_i) = -1, f(i+1) = f(i) - 1$ 。

$A_i = 0, B_i > 0$ 类似处理。最后考虑 $A_i = 0, B_i = 0$ 的情况，不妨任取一个大小不为 1 的置换环，假设环上黑点不少于白点。

可以找到 i, p_i 满足 i 是白点且 p_i 是黑点，交换位置 i, p_i 的元素等价于从环上单独拆出 p_i 。

这样环上黑点数减一，但显然不会形成大小超过 1 的纯白环。于是 A, B 不变。

$C_{i+1} = C_i - 1, f(i+1) = f(i) - 1$ 。

```
const int MAXN=1e5+5;
int n,m,a[MAXN<<1],vis[MAXN<<1];
int cnt1,cnt2;
void dfs(int pos){
    if(vis[pos])return;
    vis[pos]=true;
    if(pos<=n)cnt1++;
    else
        cnt2++;
    dfs(a[pos]);
}
int main(){
    n=read_int(),m=read_int();
    _rep(i,1,n+m)
        a[i]=read_int();
    int ans=n+m,s1=0,s2=0;
    _rep(i,1,n+m){
        if(!vis[i]){
            ans--;
            cnt1=cnt2=0;
            dfs(i);
            if(cnt1>=2&&cnt2==0)
                s1++;
            else if(cnt2>=2&&cnt1==0)
                s2++;
        }
    }
    enter(ans+2*max(s1,s2));
    return 0;
}
```

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:contest:arc_124&rev=1630584874

Last update: 2021/09/02 20:14

