

Atcoder Regular Contest 126

[比赛链接](#)

D - Pure Straight

题意

给定长度为 n 的序列，交换任意两个相邻元素的费用为 1 。

每个元素的取值范围为 $[1 \sim k]$ 问使得序列的一个连续子序列恰好为 $1, 2 \dots k$ 的最小费用。

题解

首先假设固定所选元素的初始下标为 $p_1 \lt p_2 \lt \dots \lt p_k$ 且最终这 k 个元素的下标 $[x, x+k-1]$

不妨记权值等于 i 的元素的位置为 b_i 同时设 $c_i = x+i-1$

先证明该情况下的最小费用为 $\sum_{i=1}^k |p_i - c_i| + \text{inv}(b_1, b_2 \dots, b_k)$ 其中 $\text{inv} B$ 表示序列 B 中的逆序对。

首先证明答案的下界为 $\sum_{i=1}^k |p_i - c_i| + \text{inv}(b_1, b_2 \dots, b_k)$

定义 $f(P) = \sum_{i=1}^k |p_i - c_i| + \text{inv}(b_1, b_2 \dots, b_k)$ 为序列 P 的势能(一定要保证 $p_1 \lt p_2 \lt \dots \lt p_k$)

如果某次交换的两个元素都属于所选元素，则 P 不变 $\text{inv} B$ 至多减少 1 。

如果某次交换的至多有一个元素都属于所选元素，则 $\sum_{i=1}^k |p_i - c_i|$ 至多减少 1 $\text{inv} B$ 不变。

接下来构造可以取到下界的方案，其实只要先在不交换相对位置的情况下将所有元素移到 $[x, x+k-1]$ 然后再调整次序消除逆序对即可。

接下来考虑固定所选元素的初始下标为 $p_1 \lt p_2 \lt \dots \lt p_k$ 如何确认最优的最终下标 $[x, x+k-1]$

由于此时 $\text{inv}(b_1, b_2 \dots, b_k)$ 是定值，所以只需要考虑 $\sum_{i=1}^k |p_i - c_i|$ 记 $m = \lceil \frac{k}{2} \rceil$ 不难发现 $x_m = c_m$ 时最优。此时有

$$\sum_{i=1}^k |p_i - c_i| = \sum_{i=1}^m (c_i - p_i) + \sum_{i=m+1}^k (p_i - c_i) = \sum_{i=1}^m (p_m - p_i - (m-i)) + \sum_{i=m+1}^k (p_i - p_m - (i-m))$$

上式中 $i \lt m$ 的 p_i 系数为 1 $i \gt m$ 的 p_i 系数为 -1 ，而 p_m 系数根据 k 的奇偶性为 0 或 -1 。

其他项是关于 m 的多项式，为定值。因此在 dp 过程中维护上式式子的结果和逆序对即可。

时间复杂度 $O(n^2 \cdot k)$

```
const int MAXN=205,MAXK=17,inf=1e9;
int a[MAXN],dp[1<<MAXK],bt[MAXK][1<<MAXK];
int main()
{
    int n=read_int(),k=read_int(),s=1<<k;
    for(int i=k-1;i>=0;i--){
        _for(j,0,s){
            if(j&(1<<i))
                bt[i][j]=bt[i+1][j]+1;
            else
                bt[i][j]=bt[i+1][j];
        }
    }
    int m=(k+1)/2,a;
    _for(i,0,s)dp[i]=inf;
    dp[0]=0;
    _for(i,0,n){
        a=read_int()-1;
        _for(j,0,s){
            if(!(j&(1<<a))){
                int v=dp[j]+bt[a][j];
                if(bt[0][j]>=m)
                    v+=i;
                else if(bt[0][j]+1==m){
                    if(k%2==0)
                        v-=i;
                }
            }
            else
                v-=i;
            dp[j|(1<<a)]=min(dp[j|(1<<a)],v);
        }
    }
    int ans=dp[s-1];
    _rep(i,1,k)
    ans-=abs(m-i);
    enter(ans);
    return 0;
}
```

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:contest:arc_126&rev=1633779959

Last update: 2021/10/09 19:45

