Codeforces Round #698 (Div. 1)

比赛链接

A. Nezzar and Board

题意

给定 n 个不同的 x_i□每次可以选取一对 x,y□得到 $2x-y$□(注意该操作不会删去原有的 x,y)

问是否能经过有限次操作得到 k□

题解

不妨设 $b=\min(x_i)$□记 $a_i=x_i-b,k'=k-b$□于是有 $2x_i-x_j=2a_i-2b-a_j+b=(2a_i-a_j)-b$□

如果用 a_i 替代 x_i□k' 替代 k□则所有结果相当于都平移了 b□对答案不影响。于是不妨设序列为 $0,a_2,a_3\cdots a_n$□

首先对于 $0,a$□有 $2a-0=2a,2*(2a)-a=3a,2*(3a)-(2a)=4a$□于是可以得到所有 a 的倍数。

然后假设 $n=t$ 时 g_t 一定可以得到，于是能得到 k 当且仅当 $g_t=\text{gcd}(a_2,a_3\cdots a_t)\mid k$ □

$n=2$ 时相当于 $0,a$ 的情况，显然成立。

$n=t+1$ 时，根据裴蜀定理，知存在 x,y 满足

$$ x*g_t-y*a_{t+1}=\text{gcd}(g_t,a_{t+1})=g_{t+1} $$

根据归纳假设，可以得到 g_t□如果 $x=2x'$□则先得到 $x'*g_t$ 和 $y*a_{t+1}$□于是 $g_{t+1}=2x'g_t-y*a_{t+1}$□

同理 y 为偶数时也能得到 g_{t+1}□下证一定存在 x,y 满足至少有一个偶数。

假设得到的一组 x,y 为全为奇数，则记 $c=\frac {g_t}{g_{t+1}},d=\frac {a_{t+1}}{g_{t+1}}$□于是有

$$ 1=x*c-y*d=(x+d)*c-(y+c)*d $$

因为 $(c,d)=1$□所以 c,d 中至少一个奇数，于是 $x+d,y+c$ 中至少一个偶数，证毕。

D. Nezzar and Hidden Permutations

题意

题解

```

```