Codeforces Round #705 (Div. 2)

比赛链接

E. Enormous XOR

题意

定义 $F(l,r)$ 表示 $l\oplus l+1\oplus\cdots \oplus r$求 $\max_{L\le l\le r\le R}F(l,r)$

题解

设 R 的长度为 n从低位到高位依次编号 $0,1,2\cdots n-1$若 L 的第 $n-1$ 位为 0，取 $l=2^{n-1}-1,r=2^{n-1}$得 $F(l,r)=2^n-1$

若 L 的第 $n-1$ 位为 1，下面证明若 R 为偶数且 $R-L\ge 2$ 时答案为 $R+1$否则答案为 R

首先考虑 $R-L\gt 2$ 的情况，不难发现答案一定是 R

接下来考虑 R 是奇数的情况，考虑数学归纳法。

对固定的 $L$$[L,L]$ 答案为 $L$$[L,L+1]$ 答案为 $L+1$同时 $L,L+1$ 其中一定有一个为奇数，满足数学归纳法边界条件。

假设 $[L,R]$ 答案为 R'考虑 $[L,R+2]$ 的答案，对 $r\le R$根据归纳法有 $F(l,r)\le R$

对 $F(l,R+1)$假设有 $F(l,R+1)\gt R+2$不妨假设 $F(l,R+1)$ 从高到低首个与 $R+2$ 不同的位为 k

此时有 $F(l,R+1)$ 第 k 位为 $1$$R+2$ 第 k 位为 0，由于 $R+2$ 是奇数，所以 $k\gt 0$

不妨假设 $[l,R+1]$ 中最大的且第 k 位为 1 的数是 t

于是有 $[t+1,R+1]$ 第 k 位为 $0$$[t-2^k+1,t]$ 第 k 位为 $1$$[t-2^{k+1}+1,t-2^k]$ 第 k 位为 $0\cdots$

由于 t 的末尾一定是 $111\cdots 1$于是 t 一定是奇数，于是 $[t+1,R+1]$ 长度为 $R-t+1$ 为奇数。

于是 $[l,R+1]$ 中有奇数个数第 k 位为 1 和 $[l,R+1]$ 中有奇数个数不能同时满足，即 $F(l,R+1)$ 第 k 位和第 $n-1$ 位不能同时为 1，矛盾。

对 $F(l,R+2)$有 $F(l,R+2)=F(l,R)\oplus 1\le R+1$

综上R 为奇数时，答案不超过 R同时 $F(R,R)$ 取到上界。

R 为偶数时，区间 $[L,R]$ 的答案一定不超过 $[L,R+1]$ 的答案。

由于 $R+1$ 是奇数，所以$[L,R+1]$ 答案为 $R+1$于是 $R+1$ 是 $[L,R]$ 的答案上界，同时 $F(R-2,R)=R+1$ 取到上界。

```
const int MAXN=1e6+5;
int n;
char L[MAXN],R[MAXN];
void add(char *s){
    int pos=n-1;
    while(s[pos]=='1')s[pos]='0',pos--;
    s[pos]='1';
}
int main()
{
    n=read_int();
    scanf("%s%s",L,R);
    if(L[0]!=R[0]){
        _for(i,0,n)
        putchar('1');
    }
    else if(strcmp(L,R)==0||R[n-1]=='1')
    puts(R);
    else{
        add(L);
        if(strcmp(L,R)==0)
        puts(R);
        else{
            add(R);
            puts(R);
        }
    }
    return 0;
}
```