

# KD\_Tree

## 算法简介

一种特殊的二叉树，主要用于多维空间关键数据的搜索。

空间复杂度  $O(n)$  单次插入时间复杂度  $O(\log n)$  查询时间复杂度  $O(\left(k\sqrt{1-\frac{1}{k}}n\right))$   
其中  $k$  表示空间维数。

## 算法实现

为方便理解，这里仅讲解 2D\_Tree 高维 KD\_Tree 可以类推。实际上高维 KD\_Tree 时间复杂度难以承受，算法竞赛中通常只涉及 2D\_Tree

先考虑建树过程。

二维空间的点无法直接比较大小，但如果将某个维度作为主要关键字，另一个维度作为次要关键字就可以使得比较大小成为可能。

每层都选用一个维度，对结点进行排序，取中间结点的该维度数值作为分割面，将该结点左边结点加入左子树，该结点右边结点加入右子树。

`nth_element` 库里有个叫 `nth_element` 的神奇函数，可以  $O(n)$  完成上述操作。

不断重复上述过程，便可以完成建树，而且可以使得该树高度平衡，时间复杂度  $O(n\log n)$

建树过程实际上将整个二维空间分割成了若干部分。为了方便后面查询操作的剪枝，需要维护每个结点的子树的最小覆盖矩阵。

为使空间分割尽量均匀，需要选择合适的关键字。

比较优秀的关键字选择方法为求每个维度方差，选取方差大的维度作为主要关键字。

然而上述方法代码复杂，算法竞赛一般考虑轮换的方法选取主要关键字。

接下来是插入操作，插入操作会破坏原本树的平衡性，这个问题可以用替罪羊树的重构解决。

最后是查询操作，查询其实就是个暴力查询，但可以利用最小覆盖矩阵的剪枝控制时间复杂度，详细见例题。

## 代码模板

[洛谷p4169](#)

模板题

题意

二维空间，一开始  $n$  个点  $m$  个操作。

操作一：加入点  $(x,y)$

操作二：询问当前点集中到给定点  $(x,y)$  的最小哈密顿距离。

## 题解

建树、插入操作不再赘述。关于查询操作，将当前查询结果  $\text{ans}$  设为全局变量，从根结点开始遍历 KD\_Tree 假设当前访问结点为  $\text{pos}$

首先用  $\text{pos}$  到给定点  $(x,y)$  的哈密顿距离更新  $\text{ans}$

计算给定点  $(x,y)$  到  $\text{pos}$  的两个儿子结点的最小覆盖矩阵的最小哈密顿距离，记为  $d_1, d_2$

优先遍历  $d_i$  较小的结点。若  $d_i > \text{ans}$  立刻剪枝。

```
#include <cstdio>
#include <algorithm>
#include <cstring>
#include <cctype>
#define _for(i,a,b) for(int i=(a);i<(b);++i)
#define _rep(i,a,b) for(int i=(a);i<=(b);++i)
using namespace std;
typedef long long LL;
inline int read_int(){
    int t=0;bool sign=false;char c=getchar();
    while(!isdigit(c)){sign|=c=='-';c=getchar();}
    while(isdigit(c)){t=(t<<1)+(t<<3)+(c&15);c=getchar();}
    return sign?-t:t;
}
inline void write(LL x){
    register char c[21],len=0;
    if(!x)return putchar('0'),void();
    if(x<0)x=-x,putchar('-');
    while(x)c[++len]=x%10,x/=10;
    while(len)putchar(c[len--]+48);
}
inline void space(LL x){write(x),putchar(' ');}
inline void enter(LL x){write(x),putchar('\n');}
const int MAXN=6e5+5,inf=1e9;
const double alpha=0.75;
struct Point{
    int x,y;
    Point(int x=0,int y=0):x(x),y(y){}
    int get_dis(const Point &P){
        return abs(x-P.x)+abs(y-P.y);
    }
}
void get_min(const Point &a,const Point &b){
    x=min(x,min(a.x,b.x));
    y=min(y,min(a.y,b.y));
}
```

```

    }
    void get_max(const Point &a,const Point &b){
        x=max(x,max(a.x,b.x));
        y=max(y,max(a.y,b.y));
    }
};
struct Node{
    int ch[2],cnt;
    Point p,r1,r2;
    void build(Point P){
        p=r1=r2=P;
        ch[0]=ch[1]=0;
        cnt=1;
    }
    int get_value(Point P){
        return max(r1.x-P.x,0)+max(P.x-r2.x,0)+max(r1.y-P.y,0)+max(P.y-
r2.y,0);
    }
}node[MAXN];
bool isbad(int pos){return
alpha*node[pos].cnt<max(node[node[pos].ch[0]].cnt,node[node[pos].ch[1]].cnt
)?true:false;}
void maintain(int pos){
node[pos].r1.get_min(node[node[pos].ch[0]].r1,node[node[pos].ch[1]].r1);
node[pos].r2.get_max(node[node[pos].ch[0]].r2,node[node[pos].ch[1]].r2);
node[pos].cnt=node[node[pos].ch[0]].cnt+node[node[pos].ch[1]].cnt+1;
}
int pool[MAXN],pos1,pos2,root,dimension;
Point temp[MAXN];
bool cmp(const Point &p1,const Point &p2){
    if(!dimension)return p1.x<p2.x||(p1.x==p2.x&& p1.y<p2.y);
    return p1.y<p2.y||(p1.y==p2.y&& p1.x<p2.x);
}
void Init(int n){
    node[0].r1=Point(-inf,-inf);
    node[0].r2=Point(inf,inf);
    for(int i=n;i>=1;i--)
        pool[++pos1]=i;
}
void build(int &pos,int lef,int rig,bool d){
    if(lef>rig) return pos=0,void();
    pos=pool[pos1--];
    int mid=lef+rig>>1;
    dimension=d;
    nth_element(temp+lef,temp+mid,temp+rig+1,cmp);
    node[pos].p=node[pos].r1=node[pos].r2=temp[mid];
    build(node[pos].ch[0],lef,mid-1,!d);
    build(node[pos].ch[1],mid+1,rig,!d);
    maintain(pos);
}
void build(int n){build(root,1,n,false);}

```

```
void dfs(int pos){
    if(!pos)return;
    dfs(node[pos].ch[0]);
    pool[++pos1]=pos,temp[++pos2]=node[pos].p;
    dfs(node[pos].ch[1]);
}
void rebuild(int &pos,bool d){
    pos2=0;
    dfs(pos);
    build(pos,1,pos2,d);
}
void check(int &pos,Point x,bool d){
    if(pos){
        if(isbad(pos)){
            rebuild(pos,d);
            return;
        }
        dimension=d;
        if(cmp(node[pos].p,x))
            check(node[pos].ch[1],x,!d);
        else
            check(node[pos].ch[0],x,!d);
    }
}
void Insert(int &pos,Point x,bool d){
    if(!pos){
        pos=pool[pos1--];
        node[pos].build(x);
        return;
    }
    node[pos].cnt++;
    dimension=d;
    if(cmp(node[pos].p,x))Insert(node[pos].ch[1],x,!d);
    else Insert(node[pos].ch[0],x,!d);
    maintain(pos);
}
void Insert(Point x){
    Insert(root,x,false);
    check(root,x,false);
}
int ans;
void query(int pos,Point x){
    if(!pos)
        return;
    int min_ans[2],dir;
    ans=min(ans,node[pos].p.get_dis(x));
    min_ans[0]=node[pos].ch[0]?node[node[pos].ch[0]].get_value(x):inf;
    min_ans[1]=node[pos].ch[1]?node[node[pos].ch[1]].get_value(x):inf;
    dir=min_ans[0]<min_ans[1]?0:1;
    if(ans>min_ans[dir])query(node[pos].ch[dir],x);dir=!dir;
}
```

```

    if(ans>min_ans[dir])query(node[pos].ch[dir],x);
}
int query(Point x){
    ans=inf;
    query(root,x);
    return ans;
}
int main()
{
    int n=read_int(),m=read_int(),opt,x,y;
    Init(MAXN-1);
    _rep(i,1,n)
    temp[i].x=read_int(),temp[i].y=read_int();
    build(n);
    while(m--){
        opt=read_int(),x=read_int(),y=read_int();
        if(opt==1)
            Insert(Point(x,y));
        else
            enter(query(Point(x,y)));
    }
    return 0;
}

```

## 算法习题

### 习题一

[洛谷p6514](#)

### 题意

给定  $n$  个空串，编号为  $1 \sim n$  接下来  $q$  个操作。

操作一：在编号为  $L \sim R$  的字符串末尾插入一个字符。

操作二：查询编号为  $L \sim R$  的字符串最长公共子序列长度。

### 题解

事实上对每个操作，将  $L$  视为第一维， $R$  视为第二维。

插入操作等价于插入点  $(L,R)$  查询操作等价于查询矩阵  $\left(1 \sim L, R \sim n\right)$  中点的个数。

对于查询操作，可以利用最小覆盖矩阵，类比线段树查询区间和操作。

```

#include <cstdio>
#include <algorithm>
#include <cstring>

```

```
#include <cctype>
#define _for(i,a,b) for(int i=(a);i<(b);++i)
#define _rep(i,a,b) for(int i=(a);i<=(b);++i)
using namespace std;
typedef long long LL;
inline int read_int(){
    int t=0;bool sign=false;char c=getchar();
    while(!isdigit(c)){sign|=c=='-';c=getchar();}
    while(isdigit(c)){t=(t<<1)+(t<<3)+(c&15);c=getchar();}
    return sign?-t:t;
}
inline void write(LL x){
    register char c[21],len=0;
    if(!x)return putchar('0'),void();
    if(x<0)x=-x,putchar('-');
    while(x)c[++len]=x%10,x/=10;
    while(len)putchar(c[len--]+48);
}
inline void space(LL x){write(x),putchar(' ');}
inline void enter(LL x){write(x),putchar('\n');}
const int MAXN=1e5+5,inf=1e9;
const double alpha=0.75;
struct Point{
    int x,y;
    Point(int x=0,int y=0):x(x),y(y){}
    bool in(int x1,int y1,int x2,int y2){return
x1<=x&&x<=x2&&y1<=y&&y<=y2;}
    void get_min(const Point &a,const Point &b){
        x=min(x,min(a.x,b.x));
        y=min(y,min(a.y,b.y));
    }
    void get_max(const Point &a,const Point &b){
        x=max(x,max(a.x,b.x));
        y=max(y,max(a.y,b.y));
    }
};
struct Node{
    int ch[2],cnt;
    Point p,r1,r2;
    void build(Point P){
        p=r1=r2=P;
        ch[0]=ch[1]=0;
        cnt=1;
    }
    bool in(int x1,int y1,int x2,int y2){return
x1<=r1.x&&y1<=r1.y&&x2>=r2.x&&y2>=r2.y;}
    bool out(int x1,int y1,int x2,int y2){return
x2<r1.x||y2<r1.y||x1>r2.x||y1>r2.y;}
}node[MAXN];
bool isbad(int pos){return
```

```

alpha*node[pos].cnt<max(node[node[pos].ch[0]].cnt,node[node[pos].ch[1]].cnt
)?true:false;}
void maintain(int pos){
node[pos].r1.get_min(node[node[pos].ch[0]].r1,node[node[pos].ch[1]].r1);
node[pos].r2.get_max(node[node[pos].ch[0]].r2,node[node[pos].ch[1]].r2);
node[pos].cnt=node[node[pos].ch[0]].cnt+node[node[pos].ch[1]].cnt+1;
}
int pool[MAXN],pos1,pos2,root,dimension;
Point temp[MAXN];
bool cmp(const Point &p1,const Point &p2){
if(!dimension)return p1.x<p2.x||(p1.x==p2.x&& p1.y<p2.y);
return p1.y<p2.y||(p1.y==p2.y&& p1.x<p2.x);
}
void Init(int n){
node[0].r1=Point(-inf,-inf);
node[0].r2=Point(inf,inf);
for(int i=n;i>=1;i--)
pool[++pos1]=i;
}
void build(int &pos,int lef,int rig,bool d){
if(lef>rig) return pos=0,void();
pos=pool[pos1--];
int mid=lef+rig>>1;
dimension=d;
nth_element(temp+lef,temp+mid,temp+rig+1,cmp);
node[pos].p=node[pos].r1=node[pos].r2=temp[mid];
build(node[pos].ch[0],lef,mid-1,!d);
build(node[pos].ch[1],mid+1,rig,!d);
maintain(pos);
}
void build(int n){build(root,1,n,false);}
void dfs(int pos){
if(!pos)return;
dfs(node[pos].ch[0]);
pool[++pos1]=pos,temp[++pos2]=node[pos].p;
dfs(node[pos].ch[1]);
}
void rebuild(int &pos,bool d){
pos2=0;
dfs(pos);
build(pos,1,pos2,d);
}
void check(int &pos,Point x,bool d){
if(pos){
if(isbad(pos)){
rebuild(pos,d);
return;
}
dimension=d;
if(cmp(node[pos].p,x))
check(node[pos].ch[1],x,!d);
}
}

```

```
        else
            check(node[pos].ch[0],x,!d);
    }
}
void Insert(int &pos,Point x,bool d){
    if(!pos){
        pos=pool[pos1--];
        node[pos].build(x);
        return;
    }
    node[pos].cnt++;
    dimension=d;
    if(cmp(node[pos].p,x))Insert(node[pos].ch[1],x,!d);
    else Insert(node[pos].ch[0],x,!d);
    maintain(pos);
}
void Insert(Point x){
    Insert(root,x,false);
    check(root,x,false);
}
int query(int pos,int x1,int y1,int x2,int y2){
    if(!pos)
        return 0;
    if(node[pos].in(x1,y1,x2,y2))
        return node[pos].cnt;
    else if(node[pos].out(x1,y1,x2,y2))
        return 0;
    return
    query(node[pos].ch[0],x1,y1,x2,y2)+query(node[pos].ch[1],x1,y1,x2,y2)+node[
    pos].p.in(x1,y1,x2,y2);
}
int query(int x1,int y1,int x2,int y2){
    return query(root,x1,y1,x2,y2);
}
int main()
{
    int n=read_int(),m=read_int(),opt,x,y;
    Init(MAXN-1);
    while(m--){
        opt=read_int(),x=read_int(),y=read_int();
        if(opt==1)
            Insert(Point(x,y));
        else
            enter(query(1,y,x,n));
    }
    return 0;
}
```

## 习题二

## 洛谷p3810

## 题意

三维空间中给定  $n$  个点，编号为  $1 \sim n$ 。定义  $f[i]$  表示恰好有  $i$  个元素满足  $x_i \leq x_j, y_i \leq y_j, z_i \leq z_j$  且  $i \neq j$  的  $j$  的个数。

要求输出  $f[0 \sim n-1]$ 。

## 题解

3D\_Tree 时间复杂度过高，不可取，考虑降维。

将  $z$  作为第一关键字， $x$  作为第二关键字， $y$  作为第三关键字排序，可以把问题转换为  $xOy$  平面问题，做法和上题类似。

但是很遗憾，按上题的代码会 TLE。尝试做了些小优化，还是不太行，也可能是我代码不够优美。

放弃替罪羊树，考虑直接建树。将  $(x,y)$  点列去重后建树，每个结点  $cnt$  表示该位置的结点个数，初始值为  $0$ 。

插入查找维护每个结点  $cnt$  和子树的  $cnt$  和，勉强 AC。

可以看出 KD\_Tree 常数还是挺大的，要慎用。

```

#include <cstdio>
#include <algorithm>
#include <cstring>
#include <cctype>
#define _for(i,a,b) for(int i=(a);i<(b);++i)
#define _rep(i,a,b) for(int i=(a);i<=(b);++i)
using namespace std;
typedef long long LL;
inline int read_int(){
    int t=0;bool sign=false;char c=getchar();
    while(!isdigit(c)){sign|=c=='-';c=getchar();}
    while(isdigit(c)){t=(t<<1)+(t<<3)+(c&15);c=getchar();}
    return sign?-t:t;
}
inline void write(LL x){
    register char c[21],len=0;
    if(!x)return putchar('0'),void();
    if(x<0)x=-x,putchar('-');
    while(x)c[++len]=x%10,x/=10;
    while(len)putchar(c[len--]+48);
}
inline void space(LL x){write(x),putchar(' ');}
inline void enter(LL x){write(x),putchar('\n');}
const int MAXN=1e5+5,inf=1e9;
struct Pt{

```

```
int a,b,c;
bool operator < (const Pt &y) const{
    return c<y.c || (c==y.c&&a<y.a) || (c==y.c&&a==y.a&&b<y.b);
}
bool operator == (const Pt &y) const{
    return a==y.a&&b==y.b&&c==y.c;
}
}A[MAXN],B[MAXN];
int dimension,q_x1,q_y1,q_x2,q_y2;
struct Point{
    int x,y;
    Point(int x=0,int y=0):x(x),y(y){}
    bool in(){return q_x1<=x&&x<=q_x2&&q_y1<=y&&y<=q_y2;}
    bool operator == (const Point &b) const{
        return x==b.x&&y==b.y;
    }
    int cmp(const Point &b){
        if(!dimension){
            if(x<b.x) return 0;
            else if(x==b.x){
                if(y<b.y) return 0;
                else if(y==b.y) return -1;
                else return 1;
            }
            else return 1;
        }
        else{
            if(y<b.y) return 0;
            else if(y==b.y){
                if(x<b.x) return 0;
                else if(x==b.x) return -1;
                else return 1;
            }
            else return 1;
        }
    }
}
void get_min(const Point &a,const Point &b){
    x=min(x,min(a.x,b.x));
    y=min(y,min(a.y,b.y));
}
void get_max(const Point &a,const Point &b){
    x=max(x,max(a.x,b.x));
    y=max(y,max(a.y,b.y));
}
};
struct Node{
    int ch[2],cnt,sz;
    Point p,r1,r2;
    bool in(){return q_x1<=r1.x&&q_y1<=r1.y&&q_x2>=r2.x&&q_y2>=r2.y;}
    bool out(){return q_x2<r1.x || q_y2<r1.y || q_x1>r2.x || q_y1>r2.y;}
```

```

}node[MAXN];
void maintain(int pos){
node[pos].r1.get_min(node[node[pos].ch[0]].r1,node[node[pos].ch[1]].r1);
node[pos].r2.get_max(node[node[pos].ch[0]].r2,node[node[pos].ch[1]].r2);
}
int pool[MAXN],pos1,pos2,root;
Point temp[MAXN],q_x;
bool cmp(const Point &p1,const Point &p2){
    if(!dimension)return p1.x<p2.x||(p1.x==p2.x&& p1.y<p2.y);
    return p1.y<p2.y||(p1.y==p2.y&& p1.x<p2.x);
}
void Init(int n){
    node[0].r1=Point(-inf,-inf);
    node[0].r2=Point(inf,inf);
    for(int i=n;i>=1;i--)
        pool[++pos1]=i;
}
void build(int &pos,int lef,int rig,bool d){
    if(lef>rig) return pos=0,void();
    pos=pool[pos1--];
    int mid=lef+rig>>1;
    dimension=d;
    nth_element(temp+lef,temp+mid,temp+rig+1,cmp);
    node[pos].p=node[pos].r1=node[pos].r2=temp[mid];
    build(node[pos].ch[0],lef,mid-1,!d);
    build(node[pos].ch[1],mid+1,rig,!d);
    maintain(pos);
}
void build(int n){build(root,1,n,false);}
void Insert(int &pos,bool d){
    dimension=d;
    int dir=q_x.cmp(node[pos].p);
    if(dir==-1)
        node[pos].cnt++;
    else
        Insert(node[pos].ch[dir],!d);
    node[pos].sz++;
}
void Insert(Point x){
    q_x=x;
    Insert(root,false);
}
int query(int pos){
    if(!pos)
        return 0;
    if(node[pos].in())
        return node[pos].sz;
    else if(node[pos].out())
        return 0;
    return
    query(node[pos].ch[0])+query(node[pos].ch[1])+node[pos].cnt*node[pos].p.in(

```

```
);
}
int query(int x1,int y1,int x2,int y2){
    q_x1=x1,q_y1=y1,q_x2=x2,q_y2=y2;
    return query(root);
}
int f[MAXN];
int main()
{
    int n=read_int(),k=read_int(),m,rep=0;
    _for(i,0,n)
    A[i].a=read_int(),A[i].b=read_int(),A[i].c=read_int();
    sort(A,A+n);
    _for(i,0,n)
    B[i]=A[i];
    m=unique(B,B+n)-B;
    _for(i,0,m){
        temp[i+1].x=B[i].a;
        temp[i+1].y=B[i].b;
    }
    sort(temp+1,temp+m+1,cmp);
    m=unique(temp+1,temp+m+1)-temp-1;
    Init(MAXN-1);
    build(m);

    for(int i=0,j=0;i<n;i++){
        if(A[i+1]==B[j]){
            Insert(Point(A[i].a,A[i].b));
            rep++;
            continue;
        }
        else{
            f[query(1,1,A[i].a,A[i].b)]+=rep+1;
            Insert(Point(A[i].a,A[i].b));
            j++;rep=0;
        }
    }
    _for(i,0,n)
    enter(f[i]);
    return 0;
}
```

From:  
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:  
[https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal\\_string:jxm2001:kd\\_tree&rev=1592983636](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:kd_tree&rev=1592983636)

Last update: 2020/06/24 15:27