结论 3

1、等差序列判定

给定一个序列 $a_1,a_2\cdots a_n$□则 $\max(a_i)-\min(a_i)\ge (n-1)\times \text{gcd}(a_2-a_1,a_3-a_2\cdots a_n-a_{n-1})$□

等号成立充要条件为 $a_1,a_2\cdots a_n$ 从小到大排列后可以构成等差序列。

证明：设 $g=\text{gcd}(a_2-a_1,a_3-a_2\cdots a_n-a_{n-1})$□

由于 $g\mid a_{i+1}-a_i,a_{i+2}-a_{i+1}\cdots a_j-a_{j-1}$□所以 $g\mid a_j-a_i$□得 $\text{gcd}(g,a_j-a_i)=g$□

于是 $g=\text{gcd}(a_i-a_j)(1\le i,j\le n)$□将 a_i 从小到大排序得到 $b_1,b_2\cdots b_n$ □则

$$ g\le \text{gcd}(b_2-b_1,b_3-b_2\cdots b_n-b_{n-1})\le \min(b_2-b_1,b_3-b_2\cdots b_n-b_{n-1})\le \frac {b_2-b_1+b_3-b_2\cdots +b_n-b_{n-1}}{n-1}=\frac {b_n-b_1}{n-1} $$

即 $g\le \frac{\max(a_i)-\min(a_i)}{n-1}$□当 a_i 构成等差序列时有 $\frac {\max(a_i)-\min(a_i)}{n-1}\mid g$□此时有 $\frac {\max(a_i)-\min(a_i)}{n-1}=g$□证毕。