结论 3

1、等差序列判定

给定一个序列 $a_1,a_2\cdots a_n$□则 $\max(a_i)-\min(a_i)\ge (n-1)\times \text{gcd}(a_2-a_1,a_3-a_2\cdots a_n-a_{n-1})$□

等号成立充要条件为 $a_1,a_2\cdots a_n$ 从小到大排列后可以构成等差序列。

证明：设 $g=\text{gcd}(a_2-a_1,a_3-a_2\cdots a_n-a_{n-1})$□

由于 $g\mid a_{i+1}-a_i,a_{i+2}-a_{i+1}\cdots a_j-a_{j-1}$□所以 $g\mid a_j-a_i$□得 $\text{gcd}(g,a_j-a_i)=g$□

于是 $g=\text{gcd}(a_i-a_j)(1\le i,j\le n)$□将 a_i 从小到大排序得到 $b_1,b_2\cdots b_n$ □则

$$ g\le \text{gcd}(b_2-b_1,b_3-b_2\cdots b_n-b_{n-1})\le \min(b_2-b_1,b_3-b_2\cdots b_n-b_{n-1})\le \frac {b_2-b_1+b_3-b_2\cdots +b_n-b_{n-1}}{n-1}=\frac {b_n-b_1}{n-1} $$

即 $g\le \frac{\max(a_i)-\min(a_i)}{n-1}$□当 a_i 构成等差序列时有 $\frac {\max(a_i)-\min(a_i)}{n-1}\mid g$□此时有 $\frac {\max(a_i)-\min(a_i)}{n-1}=g$□证毕。

2、数值分配

给定序列 A□要求构造序列 B,C 使得：

1. $a_i=b_i+c_i$
2. 序列 B 非严格单调递增(即不减)
3. 序列 B 非严格单调递减(即不增)

要求最小化 $\sum |b_i|+|c_i|$□则一定存在最优解满足 $b_{i+1}=b_i+\max(a_{i+1}-a_i,0),c_{i+1}=c_i+\min(a_{i+1}-a_i,0)$□具体见 证明□

3、因子个数

一个数 n 的因子个数不超过 $O\left(n^{\frac 13}\right)$□