

# wqs二分

一种用于解决恰好选  $a$  个物品的最优方案的算法。

其中设  $F(x)$  表示  $a=x$  的最佳收益函数，则  $F(x)$  必须是凸函数。

## 算法实现

由于  $F(x)$  为凸函数，所以对固定的斜率  $k$  求出斜线与  $F(x)$  构成的凸包的切点，当斜率单调变化时切点位置也是单调变化的。

于是可以二分找到切点位于  $x=a$  的斜率然后计算该点答案。接下来考虑对固定的  $k$  如何计算切点  $x$  以及切点对应的  $F(x)$

设切线为  $y=kx+b$  于是有  $b=y-kx$

求切点过程可以认为是对每个物品作一个大小为  $k$  的偏移，然后求解此时的最佳方案，同时记录最优方案中选中的物品个数。

最优方案对应最大的  $b$  这个方案对应的物品个数就是切点横坐标  $x$  然后再反过来利用  $y=b+kx$  即可得到原始答案。

注意有些时候会出现多个最佳方案的情况，这个时候要强制一下偏序，比如强制取物品最大的方案。

## 算法例题

### 例题一

[洛谷p2619](#)

### 题意

给定一个图，每条边一个边权且有一种颜色(黑/白)。要求构造一棵生成树，满足恰好有  $a$  条白边，在此基础上边权和最小。

### 题解

设  $F(x)$  表示恰好选  $x$  条白边时的最小生成树边权和，不难发现  $F(x)$  是下凸的。

二分斜率，然后每次对每条白边减去等于斜率的偏移量，然后跑一遍最小生成树同时记录最优方案选中的白边数量。

黑白边边权相同时优先考虑白边。得到最优斜率  $k$  后答案为白边作  $k$  偏移量后的最小生成树  $+ka$

时间复杂度  $O(m \log m \log V)$  注意这种生成树的题一般可以黑白边分开排序双指针处理，好

像常数可以大幅减小。

```
const int MAXN=5e4+5,MAXM=1e5+5,MAXW=105;
struct Edge{
    int u,v,w,c;
    bool operator < (const Edge &b)const{
        return w<b.w|| (w==b.w&& c<b.c);
    }
}edge[MAXN];
int p[MAXN];
int Find(int x){
    return x==p[x]?x:p[x]=Find(p[x]);
}
pair<int,int> solve(int n,int m,int w){
    _rep(i,1,n)p[i]=i;
    _for(i,0,m){
        if(!edge[i].c)
            edge[i].w-=w;
    }
    sort(edge,edge+m);
    int s1=0,s2=0;
    _for(i,0,m){
        int x=Find(edge[i].u),y=Find(edge[i].v);
        if(x!=y){
            p[x]=y;
            s1+=edge[i].w;
            s2+=edge[i].c==0;
        }
    }
    _for(i,0,m){
        if(!edge[i].c)
            edge[i].w+=w;
    }
    return make_pair(s1,s2);
}
int main(){
    int n=read_int(),m=read_int(),k=read_int();
    _for(i,0,m){
        edge[i].u=read_int()+1;
        edge[i].v=read_int()+1;
        edge[i].w=read_int();
        edge[i].c=read_int();
    }
    int lef=-MAXW,rig=MAXW,ans;
    while(lef<=rig){
        int mid=lef+rig>>1;
        if(solve(n,m,mid).second>=k){
            ans=mid;
            rig=mid-1;
        }
    }
}
```

```

    }
    else
        lef=mid+1;
    }
    enter(solve(n,m,ans).first+ans*k);
    return 0;
}

```

## 例题二

[gym102059 M](#)

### 题意

给定一棵边权树，要求从树上选  $k$  条边，所有边无公共点且最大化边权和。

### 题解

设  $F(x)$  表示选  $x$  条边的最大边权和，不难发现  $F(x)$  为凸函数。斜率最大值为  $V$  (无脑加一条边)，最小值为  $-nV$  (强行加一条边的最坏影响)。

利用  $\text{wqs}$  二分套树形  $\text{dp}$  求解即可。

```

const int MAXN=2.5e5+5,MAXV=1e6+5;
const LL inf=1e18;
struct Edge{
    int to,next;
    LL w;
    Edge(int to=0,LL w=0,int next=0){
        this->to=to;
        this->w=w;
        this->next=next;
    }
}edge[MAXN<<1];
int head[MAXN],edge_cnt;
void Insert(int u,int v,int w){
    edge[++edge_cnt]=Edge(v,w,head[u]);
    head[u]=edge_cnt;
}
struct Node{
    LL s;
    int cnt;
    Node(LL s=0,int cnt=0){
        this->s=s;
        this->cnt=cnt;
    }
    bool operator < (const Node &b)const{

```

```
        return s<b.s||(s==b.s&&cnt<b.cnt);
    }
    Node operator + (const Node &b)const{
        return Node(s+b.s,cnt+b.cnt);
    }
    void operator += (const Node &b){
        s+=b.s;
        cnt+=b.cnt;
    }
    Node operator - (const Node &b)const{
        return Node(s-b.s,cnt-b.cnt);
    }
};
Node dp[MAXN][2];
void dfs(int u,int fa){
    dp[u][0]=Node(0,0);
    dp[u][1]=Node(-inf,0);
    for(int i=head[u];i;i=edge[i].next){
        int v=edge[i].to;
        if(v==fa)continue;
        dfs(v,u);
        dp[u][0]+=max(dp[v][0],dp[v][1]);
    }
    for(int i=head[u];i;i=edge[i].next){
        int v=edge[i].to;
        if(v==fa)continue;
        dp[u][1]=max(dp[u][1],dp[u][0]-
max(dp[v][0],dp[v][1])+dp[v][0]+Node(edge[i].w,1));
    }
}
Node solve(int n,LL k){
    _rep(i,1,edge_cnt)
    edge[i].w-=k;
    dfs(1,0);
    Node ans=max(dp[1][0],dp[1][1]);
    _rep(i,1,edge_cnt)
    edge[i].w+=k;
    return ans;
}
int main(){
    int n=read_int(),k=read_int();
    _for(i,1,n){
        int u=read_int(),v=read_int(),w=read_int();
        Insert(u,v,w);
        Insert(v,u,w);
    }
    LL lef=-1LL*MAXV*n,rig=MAXV,ans;
    if(solve(n,lef).cnt<k){
        puts("Impossible");
        return 0;
    }
```

```

}
while(lef<=rig){
    LL mid=lef+rig>>1;
    if(solve(n,mid).cnt>=k){
        ans=mid;
        lef=mid+1;
    }
    else
        rig=mid-1;
}
enter(solve(n,ans).s+ans*k);
return 0;
}

```

### 例题三

CF739E

#### 题意

一共有  $n$  只宝可梦，有  $a$  个普通球和  $b$  个高级球。每个宝可梦在一次捕捉失败后就会逃跑。

对第  $i$  只宝可梦，用普通球的捕获率是  $p_i$ ，用高级球的捕获率是  $q_i$ ，同时用普通球和高级球的捕获率是  $p_i + q_i - p_i q_i$ 。

求最优策略下能捕捉宝可梦的期望值。

#### 题解

设  $F(x,y)$  表示用  $x$  个普通球和  $y$  个高级球的期望捕捉数。

不难发现对固定的  $x$ ， $F(x,y)$  是凸函数，于是利用 `wqs` 二分可以  $O(n \log v)$  计算出  $F(x,b)$ 。

然后显然  $F(x,b)$  也是凸函数，于是再套一层 `wqs` 二分可以  $O(\left(n \log^2 v\right))$  计算出  $F(a,b)$ 。

```

const int MAXN=2e3+5;
const double eps=1e-8;
struct Node{
    double s;
    int cnt1,cnt2;
    Node(double s=0.0,int cnt1=0,int cnt2=0){
        this->s=s;
        this->cnt1=cnt1;
        this->cnt2=cnt2;
    }
}

```

```
void operator += (const Node &b){
    s+=b.s;
    cnt1+=b.cnt1;
    cnt2+=b.cnt2;
}
bool operator < (const Node &b)const{
    return s<b.s;
}
};
int n,a,b;
double p[MAXN],q[MAXN],r[MAXN];
Node dp[MAXN];
Node solve2(double k1,double k2){
    Node ans=Node(0,0,0);
    _rep(i,1,n)
    ans+=max({Node(0,0,0),Node(p[i]-k1,1,0),Node(q[i]-k2,0,1),Node(r[i]-k1-
k2,1,1)});
    return ans;
}
Node solve(double k){
    double lef=0,rig=1;
    while(rig-lef>eps){
        double mid=(lef+rig)/2;
        if(solve2(k,mid).cnt2>=b)
            lef=mid;
        else
            rig=mid;
    }
    Node t=solve2(k,lef);
    t.s+=lef*b;
    return t;
}
int main(){
    n=read_int(),a=read_int(),b=read_int();
    _rep(i,1,n)
    scanf("%lf",&p[i]);
    _rep(i,1,n)
    scanf("%lf",&q[i]);
    _rep(i,1,n)
    r[i]=p[i]+q[i]-p[i]*q[i];
    double lef=0,rig=1;
    while(rig-lef>eps){
        double mid=(lef+rig)/2;
        if(solve(mid).cnt1>=a)
            lef=mid;
        else
            rig=mid;
    }
    printf("%.6lf",solve(lef).s+lef*a);
    return 0;
}
```

```
}
```

## 例题四

[洛谷p4983](#)

### 题意

给定序列  $A$

### 题解

From:

<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:

[https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal\\_string:jxm2001:wqs%E4%BA%8C%E5%88%86&rev=1629796547](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:jxm2001:wqs%E4%BA%8C%E5%88%86&rev=1629796547)

Last update: **2021/08/24 17:15**