

# 二次剩余

一个数  $a$  如果不是  $p$  的倍数且模  $p$  同余于某个数的平方，则称  $a$  为模  $p$  的二次剩余。而一个不是  $p$  的倍数的数  $b$  不同余于任何数的平方，则称  $b$  为模  $p$  的二次非剩余。

对二次剩余求解，也就是对常数  $a$  解下面的这个方程  $x^2 \equiv a \pmod p$ 。通俗一些，可以认为是求模意义下的开方。这里只讨论  $p$  为奇素数的求解方法，将会使用 Cipolla 算法。

## 解的数量

对于  $x^2 \equiv n \pmod p$  能满足“ $n$  是模  $p$  的二次剩余”的  $n$  一共有  $\frac{p-1}{2}$  个（ $0$  不包括在内），二次非剩余有  $\frac{p-1}{2}$  个。

对于给定的  $n$  和  $p$  若  $n$  是  $p$  的二次剩余，则关于  $x$  的方程  $x^2 \equiv n \pmod p$  有且仅有两个解  $x_0$  满足  $x_0^2 \equiv n \pmod p$ 。

## 勒让德符号

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{且 } n \text{ 是 } p \text{ 的二次剩余} \\ -1, & \text{且 } n \text{ 不是 } p \text{ 的二次剩余} \\ 0, & \text{且 } p \mid n \end{cases}$$

## 欧拉判别准则

$$\left(\frac{n}{p}\right) \equiv n^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$$

$n$  是二次剩余，当且仅当  $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$

$n$  是二次非剩余，当且仅当  $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p$

## Cipolla 算法

找到一个数  $a$  满足  $a^2 - n$  是二次非剩余，至于为什么要找满足二次非剩余的数，在下文会给出解释。这里通过生成随机数再检验的方法来实现，由于二次非剩余的数量为  $\frac{p-1}{2}$  接近  $\frac{p}{2}$  所以期望约  $2$  次就可以找到这个数。

建立一个“复数域”，并不是实际意义上的复数域，而是根据复数域的概念建立的一个类似的域。在复数中  $i^2 = -1$  这里定义  $i^2 = a^2 - n$  于是就可以将所有的数表达为  $A + Bi$  的形式，这里的  $A$  和  $B$  都是模意义下的数，类似复数中的实部和虚部。

在有了  $i$  和  $a$  后可以直接得到答案  $x^2 \equiv n \pmod p$  的解为  $(a+i)^{\frac{p+1}{2}}$

参考实现：

```
#include <bits/stdc++.h>
```

```
using namespace std;

typedef long long ll;
int t;
ll n, p;
ll w;

struct num { //建立一个复数域
    ll x, y;
};

num mul(num a, num b, ll p) { //复数乘法
    num ans = {0, 0};
    ans.x = ((a.x * b.x % p + a.y * b.y % p * w % p) % p + p) % p;
    ans.y = ((a.x * b.y % p + a.y * b.x % p) % p + p) % p;
    return ans;
}

ll binpow_real(ll a, ll b, ll p) { //实部快速幂
    ll ans = 1;
    while (b) {
        if (b & 1) ans = ans * a % p;
        a = a * a % p;
        b >>= 1;
    }
    return ans % p;
}

ll binpow_imag(num a, ll b, ll p) { //虚部快速幂
    num ans = {1, 0};
    while (b) {
        if (b & 1) ans = mul(ans, a, p);
        a = mul(a, a, p);
        b >>= 1;
    }
    return ans.x % p;
}

ll cipolla(ll n, ll p) {
    n %= p;
    if (p == 2) return n;
    if (binpow_real(n, (p - 1) / 2, p) == p - 1) return -1;
    ll a;
    while (1) { //生成随机数再检验找到满足非二次剩余的a
        a = rand() % p;
        w = ((a * a % p - n) % p + p) % p;
        if (binpow_real(w, (p - 1) / 2, p) == p - 1) break;
    }
    num x = {a, 1};
    return binpow_imag(x, (p + 1) / 2, p);
}
```

}

## 例题

{<https://www.luogu.com.cn/problem/P5491>|【模板】二次剩余}

题意：求解方程  $x^2 \equiv N \pmod p$

题解：模板题

代码：

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long ll;
ll w;
struct num{
    ll x,y;
};
num mul(num a,num b,ll p){
    num ans={0,0};
    ans.x=((a.x*b.x%p+a.y*b.y%p*w%p)%p+p)%p;
    ans.y=((a.y*b.x%p+a.x*b.y%p)%p+p)%p;
    return ans;
}
ll binpow_real(ll a,ll b,ll p){
    ll ans=1;
    while(b){
        if(b&1) ans=ans*a%p;
        a=a*a%p;
        b>>=1;
    }
    return ans%p;
}
ll binpow_imag(num a,ll b,ll p){
    num ans={1,0};
    while(b){
        if(b&1) ans=mul(ans,a,p);
        a=mul(a,a,p);
        b>>=1;
    }
    return ans.x%p;
}
ll cipolla(ll n,ll p){
    n%=p;
    if(p==2) return n;
    if(binpow_real(n,(p-1)/2,p)==p-1) return -1;
    ll a;
    while(1){
```

```
    a=rand()%p;
    w=((a*a%p-n)%p+p)%p;
    if(binpow_real(w,(p-1)/2,p)==p-1) break;
}
num x={a,1};
return binpow_imag(x,(p+1)/2,p);
}
int main(){
    srand(time(0));
    int t;
    scanf("%d",&t);
    while(t--){
        ll n,p;
        scanf("%lld %lld",&n,&p);
        if(!n){
            puts("0");continue;
        }
        ll ans1=cipolla(n,p),ans2;
        if(ans1==-1){
            puts("Hola!");continue;
        }
        ans2=p-ans1;
        if(ans1==ans2) printf("%lld\n",ans1);
        else if(ans1<ans2) printf("%lld %lld\n",ans1,ans2);
        else printf("%lld %lld\n",ans2,ans1);
    }
    return 0;
}
```

## 参考链接

{OI Wiki|<https://oi-wiki.org/math/quad-residue/>}

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: [https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal\\_string:lgwza:%E4%BA%8C%E6%AC%A1%E5%89%A9%E4%BD%99&rev=1610887549](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:lgwza:%E4%BA%8C%E6%AC%A1%E5%89%A9%E4%BD%99&rev=1610887549)

Last update: 2021/01/17 20:45