博弈论和 SG 函数

必胜点和必败点

- P 点：必败点，换而言之，就是谁处于此位置，则在双方操作正确的情况下必败。
- N 点：必胜点，处于此情况下，双方操作均正确的情况下必胜。

必胜点和必败点的性质：

- 所有终结点是必败点 P□
- 从任何必胜点 N 操作，至少有一种方式可以进入必败点 P□
- 无论如何操作，必败点 P 都只能进入必胜点 N□

NIM 游戏

两个人玩这个游戏，他们轮流操作。

有若干堆石子，每堆石子的数量都是有限的。

一次合法的移动是“ 选择一堆石子并拿走若干颗（不能不拿） ”。

如果轮到某个人时所有的石子堆都已经被拿空了，则判负。

如果双方都按照最优策略，谁必胜？

Bouton’s Theorem

对于一个 nim 游戏的局面 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$□它是 P 点当且仅当□ $$ a_1\oplus a_2\oplus\cdots\oplus a_n=0 $$ □证明】

1. 终结点只有一种，就是 $(0,0,\cdots,0)$□显然符合异或和为 0，为 P 点。
2. 对于 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 且 $a_1\oplus a_2\oplus\cdots\oplus a_n=0$□经一次移动后必然到达 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$□其中 $$ b_1\oplus b_2\oplus\cdots\oplus b_n\ne 0 $$ 从而到达 N 点。
3. 对于 $(a_1,a_2\cdots,a_n)$ 且 $a_1\oplus a_2\oplus\cdots\oplus a_n\ne 0$□必存在移动方法可以到达 P 点。

我们设 $a_1\oplus a_2\oplus\cdots\oplus a_n=k$□那么设 k 的二进制表示下最高位的 1 为 第 p 位。

那么□$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中必定存在至少一个 a_i 使得 a_i 二进制表示下第 p 位为 1。

从而，将第 i 堆石头取 $a_i-a_i\oplus k$ 个石头即可保证一定到达 P 点。

首先，由于 $a_i\oplus k$ 第 p 位为 0，所以 $a_i\oplus k<a_i$□从而 $a_i-a_i\oplus k>0$□符合游戏规则。

并且，取 $a_i-a_i\oplus k$ 个石头后，第 i 堆石头变为 $a_i\oplus k$□对于新局面 $(a_1,a_2,\cdots,a_i\oplus k,\cdots,a_n)$□ $$ a_1\oplus a_2\oplus\cdots\oplus(a_i\oplus k)\oplus\cdots\oplus a_n=k\oplus k=0 $$ 从而一定为 P 点。