

博弈论和 SG 函数

必胜点和必败点

- P 点：必败点，换言之，就是谁处于此位置，则在双方操作正确的情况下必败。
- N 点：必胜点，处于此情况下，双方操作均正确的情况下必胜。

必胜点和必败点的性质：

- 所有终结点是必败点 P
- 从任何必胜点 N 操作，至少有一种方式可以进入必败点 P
- 无论如何操作，必败点 P 都只能进入必胜点 N

NIM 游戏

两个人玩这个游戏，他们轮流操作。

有若干堆石子，每堆石子的数量都是有限的。

一次合法的移动是“选择一堆石子并拿走若干颗（不能不拿）”。

如果轮到某个人时所有的石子堆都已经被拿空了，则判负。

如果双方都按照最优策略，谁必胜？

Bouton's Theorem

对于一个 nim 游戏的局面 (a_1, a_2, \dots, a_n) 它是 P 点当且仅当 $a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n = 0$ 【证明】

1. 终结点只有一种，就是 $(0, 0, \dots, 0)$ 显然符合异或和为 0，为 P 点。
2. 对于 (a_1, a_2, \dots, a_n) 且 $a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n = 0$ 经一次移动后必然到达 (b_1, b_2, \dots, b_n) 其中 $b_1 \oplus b_2 \oplus \dots \oplus b_n \neq 0$ 从而到达 N 点。
3. 对于 (a_1, a_2, \dots, a_n) 且 $a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n \neq 0$ 必存在移动方法可以到达 P 点。

我们设 $a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n = k$ 那么设 k 的二进制表示下最高位的 1 为第 p 位。

那么 (a_1, a_2, \dots, a_n) 中必定存在至少一个 a_i 使得 a_i 二进制表示下第 p 位为 1。

从而，将第 i 堆石头取 $a_i - a_i \oplus k$ 个石头即可保证一定到达 P 点。

首先，由于 $a_i \oplus k$ 第 p 位为 0，所以 $a_i \oplus k < a_i$ 从而 $a_i - a_i \oplus k > 0$ 符合游戏规则。

并且，取 $a_i - a_i \oplus k$ 个石头后，第 i 堆石头变为 $a_i \oplus k$ 对于新局面 $(a_1, a_2, \dots, a_i \oplus k, \dots, a_n)$ $a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus (a_i \oplus k) \oplus \dots \oplus a_n = k \oplus k = 0$ 从而一定为 P 点。

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - **CVBB ACM Team**

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:lgwza:%E5%8D%9A%E5%BC%88%E8%AE%BA&rev=1600957304

Last update: **2020/09/24 22:21**

