

# 博弈论和 SG 函数

## 必胜点和必败点

- $P$  点：必败点，换言之，就是谁处于此位置，则在双方操作正确的情况下必败。
- $N$  点：必胜点，处于此情况下，双方操作均正确的情况下必胜。

必胜点和必败点的性质：

- 所有终结点是必败点  $P$
- 从任何必胜点  $N$  操作，至少有一种方式可以进入必败点  $P$
- 无论如何操作，必败点  $P$  都只能进入必胜点  $N$

## NIM 游戏

两个人玩这个游戏，他们轮流操作。

有若干堆石子，每堆石子的数量都是有限的。

一次合法的移动是“选择一堆石子并拿走若干颗（不能不拿）”。

如果轮到某个人时所有的石子堆都已经被拿空了，则判负。

如果双方都按照最优策略，谁必胜？

## Bouton's Theorem

对于一个 nim 游戏的局面  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  它是  $P$  点当且仅当  $a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n = 0$  【证明】

1. 终结点只有一种，就是  $(0, 0, \dots, 0)$  显然符合异或和为  $0$ ，为  $P$  点。
2. 对于  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  且  $a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n = 0$  经一次移动后必然到达  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$  其中  $b_1 \oplus b_2 \oplus \dots \oplus b_n \neq 0$  从而到达  $N$  点。
3. 对于  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  且  $a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n \neq 0$  必存在移动方法可以到达  $P$  点。

我们设  $a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n = k$  那么设  $k$  的二进制表示下最高位的  $1$  为第  $p$  位。

那么  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  中必定存在至少一个  $a_i$  使得  $a_i$  二进制表示下第  $p$  位为  $1$ 。

从而，将第  $i$  堆石头取  $a_i - a_i \oplus k$  个石头即可保证一定到达  $P$  点。

首先，由于  $a_i \oplus k$  第  $p$  位为  $0$ ，所以  $a_i \oplus k < a_i$  从而  $a_i - a_i \oplus k > 0$  符合游戏规则。

并且，取  $a_i - a_i \oplus k$  个石头后，第  $i$  堆石头变为  $a_i \oplus k$  对于新局面  $(a_1, a_2, \dots, a_i \oplus k, \dots, a_n)$   $a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus (a_i \oplus k) \oplus \dots \oplus a_n = k \oplus k = 0$  从而一定为  $P$  点。

From:  
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:  
[https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal\\_string:lgwza:%E5%8D%9A%E5%BC%88%E8%AE%BA&rev=1600957304](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:lgwza:%E5%8D%9A%E5%BC%88%E8%AE%BA&rev=1600957304) 

Last update: **2020/09/24 22:21**