

博弈论和 SG 函数

必胜点和必败点

- P 点：必败点，换言之，就是谁处于此位置，则在双方操作正确的情况下必败。
- N 点：必胜点，处于此情况下，双方操作均正确的情况下必胜。

必胜点和必败点的性质：

- 所有终结点是必败点 P
- 从任何必胜点 N 操作，至少有一种方式可以进入必败点 P
- 无论如何操作，必败点 P 都只能进入必胜点 N

NIM 游戏

两个人玩这个游戏，他们轮流操作。

有若干堆石子，每堆石子的数量都是有限的。

一次合法的移动是“选择一堆石子并拿走若干颗（不能不拿）”。

如果轮到某个人时所有的石子堆都已经被拿空了，则判负。

如果双方都按照最优策略，谁必胜？

Bouton's Theorem

对于一个 nim 游戏的局面 (a_1, a_2, \dots, a_n) 它是 P 点当且仅当 $a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n = 0$ 【证明】

1. 终结点只有一种，就是 $(0, 0, \dots, 0)$ 显然符合异或和为 0 ，为 P 点。
2. 对于 (a_1, a_2, \dots, a_n) 且 $a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n = 0$ 经一次移动后必然到达 (b_1, b_2, \dots, b_n) 其中 $b_1 \oplus b_2 \oplus \dots \oplus b_n \neq 0$ 从而到达 N 点。
3. 对于 (a_1, a_2, \dots, a_n) 且 $a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n \neq 0$ 必存在移动方法可以到达 P 点。

我们设 $a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n = k$ 那么设 k 的二进制表示下最高位的 1 为第 p 位。

那么 (a_1, a_2, \dots, a_n) 中必定存在至少一个 a_i 使得 a_i 二进制表示下第 p 位为 1 。

从而，将第 i 堆石头取 $a_i - a_i \oplus k$ 个石头即可保证一定到达 P 点。

首先，由于 $a_i \oplus k$ 第 p 位为 0 ，所以 $a_i \oplus k < a_i$ 从而 $a_i - a_i \oplus k > 0$ 符合游戏规则。

并且，取 $a_i - a_i \oplus k$ 个石头后，第 i 堆石头变为 $a_i \oplus k$ 对于新局面 $(a_1, a_2, \dots, a_i \oplus k, \dots, a_n)$ $a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus (a_i \oplus k) \oplus \dots \oplus a_n = k \oplus k = 0$ 从而一定为 P 点。

有向图移动游戏

有向图移动游戏可以看作所有 *Impartial Combinatorial Games* 的抽象模型。

NIM 游戏就是 *Impartial Combinatorial Games* 其中的一种。

也就是说，所有 **ICG** 游戏都可以看成：

给定一个 **DAG** 及一个点上的一个棋子，两名选手交替将棋子沿边移动，无法移动判负。

我们把 **NIM** 游戏的每一个状态看成一个点，把这个状态和其可以转移到的下一个状态连边。那么 **NIM** 游戏也被抽象成了一个有向图移动游戏！

SG 函数

定义 $\text{mex}(S)=k$ 为最小的不属于集合 S 的非负整数。

SG 函数的定义：对于任意一个状态 x 都定义一个 SG 函数。

我们先给出定义式，再具体说明意义。

对于任意状态 x 设 x 的后继状态集合为 S 则： $\text{sg}(x)=\text{mex}(S)$ 如果一个状态为终结点，则 $S=\emptyset$ 从而 $\text{sg}(x)=0$

有向图移动游戏

事实上，如果把所有 **ICG** 游戏抽象成有向图移动游戏，那么 sg 函数就是
$$\text{sg}(x)=\text{mex}\{\text{sg}(y)\mid(x\rightarrow y)\}$$
 我们有这样的结论
$$\text{sg}(x)=0\iff x\text{ 是 }P\text{ 态}\quad \text{sg}(x)\neq 0\iff x\text{ 是 }N\text{ 态}$$
 对于这个结论的正确性显然：

对于 $\text{sg}(x)=0$ 的结点，显然根据定义 x 的后继中一定不存在 $\text{sg}(y)=0$ 的结点 y

同时，对于 $\text{sg}(x)\neq 0$ 的结点，根据定义，一定存在一个 x 的后继 y 使 $\text{sg}(y)=0$

取石子游戏

两个人取石子，每个人可以取 $1,3,4$ 个石子。

共有 n 个石子，求是先手必胜还是后手必胜。

$$\text{sg}(0)=0,\text{sg}(i)=\text{mex}\{\text{sg}(i-1),\text{sg}(i-3),\text{sg}(i-4)\}$$

SG 定理

假设一个游戏可以分成若干个子游戏，这些子游戏的 sg 函数值为 s_1,s_2,\dots,s_k 则：整个游戏

的 sg 函数为 $sg(All) = s_1 \oplus s_2 \oplus \dots \oplus s_k$ 我们设 $sg(x) = a$ 那么也就是说 x 的后继结点 y 能取遍 $1, 2, \dots, a-1$

那么我们选取后继，事实上可以看成“取石子”的过程。

这样想的话，就可以利用 **Bouton's Theorem** 的证明来理解 SG 定理了。

From:

<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:

https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:lgwza:%E5%8D%9A%E5%BC%88%E8%AE%BA&rev=1600957334

Last update: 2020/09/24 22:22