

# 可逆背包

## 问题简介

考虑这样一个问题：有  $n$  个物品，体积分别是  $w_1, w_2, \dots, w_n$ ，背包容量为  $m$ ，共有  $n$  次询问，第  $i$  次询问要求不选物品  $i$  时共有多少选法装满背包。

## 思路分析

如果对于每个询问依次求 01 背包问题，单次询问需要  $O(nm)$  的时间，总复杂度  $O(n^2m)$ 。而退背包能让我们不需要对于每个询问都进行完整的 DP，而是用  $O(m)$  的时间去掉选择了物品  $i$  的方案数，那么整个过程需要一次  $O(nm)$  的 DP 和  $n$  次  $O(m)$  的退背包/加背包过程，整体复杂度就降到了  $O(nm)$ 。

## 算法步骤

### 1. 执行一次 01 背包算法过程

```
for(int j=m; j>=w[i]; --j)
    f[j] += f[j-w[i]];
```

### 2. 对每个物品，将其看作是最后一个加入背包的物品，然后减掉它的方案数

```
memcpy(g, f, sizeof f);
for(int j=w[i]; j<=m; ++j)
    g[j] -= g[j-w[i]];
```

## 例题

### 例 1

[洛谷 P4141 消失之物](#)

### 题意

有  $n$  个物品，体积分别是  $w_1, w_2, \dots, w_n$ 。现第  $i$  个物品丢失，用剩下的  $n-1$  个物品装满容积为  $x$  的背包，有几种方法。把答案记为  $\text{cnt}(i, x)$ 。要得到所有  $i \in [1, n], x \in [1, m]$  的  $\text{cnt}(i, x)$  表格。输出  $n \times m$  的矩阵，表示  $\text{cnt}(i, x)$  的末位数字。

$1 \leq n, m \leq 2000$

## 题解

令  $f[j][0]$  表示不算消失的物品组成容积为  $j$  的方案数，即 01 背包问题，令  $f[j][1]$  表示删掉某个物品后组成容积为  $j$  的方案数。初始化是  $f[0][0]=f[0][1]=1$  即容积为 0 时方案数为 1

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
const int N=2e3+5;
int f[N][2],w[N];

int main(){
    int n,m;
    scanf("%d %d",&n,&m);
    for(int i=1;i<=n;i++) scanf("%d",&w[i]);
    f[0][0]=f[0][1]=1;
    for(int i=1;i<=n;i++){
        for(int j=m;j>=w[i];j--){
            f[j][0]=(f[j][0]+f[j-w[i]][0])%10;
        }

        for(int i=1;i<=n;i++){
            for(int j=1;j<=m;j++){
                if(j-w[i]>=0) f[j][1]=(f[j][0]-f[j-w[i]][1]+10)%10;
                else f[j][1]=f[j][0]%10;
                printf("%d",f[j][1]);
            }
            puts("");
        }
        return 0;
    }
```

## 例 2

### CF 1111 D. Destroy the Colony

## 题意

给定一个长度为偶数的由大小写字母组成的字符串  $s$  一个“好”字符串可通过重排字母顺序使得所有相同字母的位置都在  $s$  的同一半  $[1,n/2]$  or  $[n/2+1,n]$  来生成  $q$  个询问，给定一对  $(i,j)$  要求字母  $s[i],s[j]$  也在  $s$  的同一半的“好”字符串数量。

## 题解

注意到询问本质上最多只有  $52^2$  种可能，则考虑先把所有询问算出来，最后  $O(1)$  回答询问。

1. 令  $k$  为字母种数，统计各字母的出现次数  $c_1, c_2, \dots, c_k$ 。若有  $i_1, i_2, \dots, i_p$  使得  $c_{i_1} + c_{i_2} + \dots + c_{i_p} = \frac{n}{2}$ ，则把它们放到第一组，剩下的放到第二组，第一组的排列数为  $\frac{(\frac{n}{2})!}{c_{i_1}! c_{i_2}! \dots c_{i_p}!}$ ，第二组排列数为  $\frac{(\frac{n}{2})!}{c_{j_1}! c_{j_2}! \dots c_{j_s}!}$ 。总方法数为  $W = \frac{(\frac{n}{2})! (\frac{n}{2})!}{c_1! c_2! \dots c_k!}$ 。
2. 注意到  $c_i$  求和为  $\frac{n}{2}$  的组合数可用 01 背包来求，在没有  $(i, j)$  限制下的“好”字符串数量为  $W * dp[n/2][2]$ 。
3. 现考虑  $(i, j)$  的限制，即字母  $s[i]$  和  $s[j]$  需在同一组中，等价于去掉字母  $s[i]$  和  $s[j]$  的 01 背包问题，即作了一次 01 背包问题后，再枚举  $i, j$  做退背包过程，将去掉  $(i, j)$  的 DP 值记作  $ans[i][j]$ 。
4. 最后对每个询问直接  $O(1)$  输出答案即可。

From:  
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:  
[https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal\\_string:lgwza:%E5%8F%AF%E9%80%86%E8%83%8C%E5%8C%85&rev=1626447468](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:lgwza:%E5%8F%AF%E9%80%86%E8%83%8C%E5%8C%85&rev=1626447468)

Last update: 2021/07/16 22:57

