

图匹配

匹配 或是 独立边集 是一张图中没有公共点的集合。在二分图中求匹配等价于网络流问题。

图匹配算法是信息学竞赛中常用的算法，总体分为最大匹配以及最大权匹配，先从二分图开始介绍，再进一步提出一般图的做法。

图的匹配

在图论中，假设图 $G=(V,E)$ 其中 V 是点集 E 是边集。

一组两两没有公共点的边集 $M(M \subseteq E)$ 称为这张图的 匹配

定义匹配的大小为其中边的数量 $|M|$ 其中边数最大的 M 为 最大匹配

当图中的边带权的时候，边权和最大的为 最大权匹配

匹配中的边称为 匹配边，反之称为 未匹配边

一个点如果属于 M 且为至多一条边的端点，称为 匹配点，反之称为 未匹配点

- maximal matching: 无法再增加匹配边的匹配。不见得是最大匹配。
- 最大匹配(maximum matching): 匹配数最多的匹配。
- 完美匹配(perfect matching): 所有点都属于匹配，同时也符合最大匹配。
- 近完美匹配(near-perfect matching): 发生在图的点数为奇数，刚好只有一个点不在匹配中，扣掉此点以后的图称为 factor-critical graph



maximal matching



最大匹配

二分图匹配



一张二分图上的匹配称作二分图匹配。

设 G 为二分图，若在 G 的子图 M 中，任意两条边都没有公共点，那么称 M 为二分图 G 的一个匹配，且 M 的边数为匹配数。

完备匹配

设 $G=(V_1, V_2, E)$ 为二分图 $|V_1|=|V_2|$ M 为 G 中一个最大匹配，且 $|M|=|V_1|$ 则称 M 为 V_1 到 V_2 的完备匹配。

霍尔定理

设二分图 $G = \langle V_1, V_2, E \rangle, |V_1| = |V_2|$ 则 G 中存在 V_1 到 V_2 的完备匹配当且仅当对于任意的 $S \subseteq V_1$ 均有 $|S| \leq |N(S)|$ 其中 $N(S) = \bigcup_{v_i \in S} \{N(v_i)\}$ 是 S 的邻域。

最大匹配

寻找二分图边数最大的匹配称为最大匹配问题。

算法

组合优化中的一个基本问题是求 **最大匹配(maximum matching)**

二分图最大匹配

在无权二分图中 Hopcroft-Karp 算法可在 $O(\sqrt{VE})$ 解决。

二分图最大权匹配

在带权二分图中，可用 Hungarian 算法解决。如果在最短路搜寻中用 Bellman-Ford 算法，时间复杂度为 $O(V^2E)$ 如果用 Dijkstra 算法或 Fibonacci heap 可用 $O(V^2 \log V + VE)$ 解决。

一般图最大匹配

无权一般图中 Edmonds' blossom 算法可在 $O(V^2E)$ 解决。

一般图最大权匹配

带权一般图中 Edmonds' blossom 算法可在 $O(V^2E)$ 解决。

参考链接

[OI Wiki](#)

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:lgwza:%E5%9B%BE%E5%8C%B9%E9%85%8D

Last update: **2020/08/09 10:15**

