

# 杜教筛

## 积性函数

在数论题目中，常常需要根据一些积性函数的性质，求出一些式子的值。

积性函数：对于函数  $f(n)$  有  $f(1)=1$  且对于所有互质的  $a$  和  $b$  总有  $f(ab)=f(a)f(b)$  则称  $f(n)$  为积性函数。

常见的积性函数有：

- $\sigma_0(n)=d(n)=\sum_{d|n} 1$
- $\sigma(n)=\sum_{d|n} d$
- $\varphi(n)=\sum_{i=1}^n [\gcd(x,i)=1]$
- $\mu(n)=\begin{cases} 1 & n=1 \\ (-1)^k & \prod_{i=1}^k q_i=1 \ \& \ \max\{q_i\}>1 \end{cases}$

积性函数有如下性质：

若  $f(n)$  和  $g(n)$  为积性函数，则：

- $h(n)=f(n^p)$
- $h(n)=f^p(n)$
- $h(n)=f(n)g(n)$
- $h(n)=\sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$

中的  $h(n)$  也为积性函数。

在莫比乌斯反演的题目中，往往要求出一些数论函数的前缀和，利用杜教筛可以快速求出这些前缀和。

## 杜教筛

杜教筛被用来处理数论函数的前缀和问题。对于求解一个前缀和，杜教筛可以在低于线性时间的复杂度内求解

对于数论函数  $f$  要求我们计算  $S(n)=\sum_{i=1}^n f(i)$ 。

我们想办法构造一个  $S(n)$  关于  $S(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$  的递推式

对于任意一个数论函数  $g$  必满足  $\sum_{i=1}^n \sum_{d|mid i} f(d)g(\frac{i}{d}) = \sum_{i=1}^n g(i)S(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor} g(i)f(j) = \sum_{i=1}^n g(i)S(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$$

略证：

$f(d)g(\frac{i}{d})$  就是对所有  $i \leq n$  的做贡献，因此变换枚举顺序，枚举  $d, \frac{i}{d}$  分别对应新的  $i, j$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor} g(i)f(j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor} g(i)f(j)$$

$= \sum_{i=1}^n (i) S(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$  那么可以得到递推式  $g(1)S(n) = \sum_{i=1}^n (f * g)(i) - \sum_{i=2}^n (i) S(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$  那么假如我们可以快速对  $\sum_{i=1}^n (f * g)(i)$  求和，并用数论分块求解  $\sum_{i=2}^n (i) S(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$  就可以在较短时间内求得  $g(1)S(n)$

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: [https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal\\_string:lgwza:%E6%9D%9C%E6%95%99%E7%AD%9B&rev=1599448215](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:lgwza:%E6%9D%9C%E6%95%99%E7%AD%9B&rev=1599448215)

Last update: 2020/09/07 11:10