

# 生成函数理论

## 基本定义

定义 1 数列  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  的普通生成函数是下面的形式级数  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . 定义 2 数列  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  的指数型生成函数是下面的形式级数  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ . 定义 3 数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  的 Dirichlet 生成函数是下面的形式级数  $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ . 例 4 数列  $\{1\}_{n=0}^{\infty}$  的普通生成函数是  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ . 同一个数列  $\{1\}_{n=0}^{\infty}$  的指数型生成函数是  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ . 而数列  $\{1\}_{n=0}^{\infty}$  的 Dirichlet 生成函数则是  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$ . 这个函数就是著名的 Riemann-Zeta 函数.

注 5 上面几个公式中的“=”的意义是“形式收敛”。从解析上讲，若级数  $A$  与另一级数  $B$  分别在某个区间上收敛到同一形式，则  $A$  和  $B$  必定是同一级数，从而可以通过级数  $B$  的表达形式来找到  $A$ 。因此，我们一般无须考虑这些生成函数在何处收敛。而利用收敛到的闭形式（即和函数）的最终目的之一也是导出原始级数比较简单的表达形式，例如  $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ .

注 6 可以定义形式级数上的运算。下面以普通生成函数为例加以说明。若形式级数的系数在域  $F$  中，也称其为域  $F$  上的形式级数。域  $F$  上的所有形式级数组成的集合记为  $F[[x]]$ 。对于形式级数  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \in F[[x]]$  定义  $f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$  和  $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ , 其中  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} (n \geq 0)$ 。容易证明  $F[[x]]$  在这样的加法和乘法下构成一个环。进一步，对于  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  定义  $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$  为  $f(x)$  的形式微商或形式导数。

如果生成函数是有限项的级数，它对应的就是一个有限项的数列（或者说自某一项以后全部为零的数列），这时形式级数就是一个多项式。

定义 7 若形式级数  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  是多项式，或形式级数  $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  满足  $b_0 = 0$  则可以定义  $f(x)$  与  $g(x)$  的复合  $f(g(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (g(x))^n$ . 当相关的复合存在，且  $f(g(x)) = g(f(x)) = x$  时，则称  $g(x)$  为  $f(x)$  的复合逆。

有时候，用  $[x^n]f(x)$  表示  $f(x)$  中  $x^n$  的系数，用  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \leftarrow f(x)$  表示数列  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  的生成函数是  $f(x)$ 。如果不加注明，则此生成函数为普通生成函数。

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team  
 Permanent link: [https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal\\_string:lgwza:%E7%94%9F%E6%88%90%E5%87%BD%E6%95%B0%E7%90%86%E8%AE%BA\\_%E5%9F%BA%E6%9C%AC%E5%AE%9A%E4%B9%89&rev=1612866294](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:lgwza:%E7%94%9F%E6%88%90%E5%87%BD%E6%95%B0%E7%90%86%E8%AE%BA_%E5%9F%BA%E6%9C%AC%E5%AE%9A%E4%B9%89&rev=1612866294)  
 Last update: 2021/02/09 18:24