

生成函数理论2

基本例子

例1 设 $n \geq 1$ 记 $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ 的子集个数，求 a_n

解：易知 $a_n = 2a_{n-1}$ ($n \geq 1$) 的普通生成函数为
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 1 + 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + 2xf(x)$$
 所以
$$f(x) = \frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$
 比较系数得 $a_n = 2^n$.

例2 设有三种物体 a, b, c 令 a_n 表示从中不重复地选取 n 种物体的方法数，则

$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 对应的普通生成函数可如下得出
$$\begin{aligned} (1+ax)^0 + (1+ax)^1 + (1+ax)^2 + \dots &= \frac{1}{1-ax} \\ (1+bx)^0 + (1+bx)^1 + (1+bx)^2 + \dots &= \frac{1}{1-bx} \\ (1+cx)^0 + (1+cx)^1 + (1+cx)^2 + \dots &= \frac{1}{1-cx} \end{aligned}$$
 上式中 x^i 的系数表明选取 i 种物体的选取方式。例如 x^2 的系数为 $ab+bc+ca$ 表明选取 2 种物体时选取的是 a 和 b 或者 b 和 c 或者 c 和 a 这三种方式。若仅仅求选取方法数，则只令 $a=b=c=1$ 即可。这时，有
$$a_n \rightarrow (1+x)^3$$
 这样就得到 $a_n = \binom{3}{n}$.

现在改变规则：设 a 可取 0, 1 或 2 次 b 可取 0 或 1 次 c 可取偶数次。令 b_n 表示选取 n 个物体的方法数，则 $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ 对应的普通生成函数即
$$\begin{aligned} (1+x+x^2)(1+x)(1+x^2+x^4+\dots) &= \frac{1+x+x^2}{1-x} \\ &= (1+x+x^2) \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (1+2x+3x^2) x^{2n} \end{aligned}$$
 从以上的生成函数不难看出，当 $n \geq 2$ 时， $b_n = 3b_{n-2}$

例3 给定正整数 k 令 h_n 表示方程 $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ 的非负整数解的个数。我们已经知道 $h_n = \binom{n+k-1}{n}$ 求 $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ 对应的普通生成函数的闭形式。

解令 $h(x)$ 表示 $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数，则有
$$\begin{aligned} h(x) &= \underbrace{(1+x+x^2+\dots)(1+x+x^2+\dots)\dots(1+x+x^2+\dots)}_{k \text{ 个}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} x^i \right)^k = \frac{1}{(1-x)^k} \end{aligned}$$
 例5 从数量不限的苹果、香蕉、橘子和梨中，选取 n 个水果装成一袋，且选取的苹果数是偶数，香蕉数是 5 的倍数，橘子最多有 4 个，而梨最多有 1 个。记这样的装法有 h_n 种，求 h_n

解令 $g(x)$ 为 $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数，则
$$\begin{aligned} g(x) &= (1+x^2+x^4+\dots)(1+x^5+x^{10}+\dots)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x) \\ &= \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1-x^5}{1-x} \cdot (1+x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{n} x^n \end{aligned}$$
 从而由推论 4 有 $h_n = n+1$

例6 推导斐波那契数列的通项公式，其中 $a_0=0, a_1=1, a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ ($n > 1$)

解设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数是 $f(x)$ 那么根据其递推式，可以得到一个有关 $f(x)$ 的方程 $f(x) = xf(x) + x^2f(x) - a_0x + a_1x + a_0$ 那么解得
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{1-x-x^2} \\ &= \frac{A}{1-ax} + \frac{B}{1-bx} = \frac{x}{(1-ax)(1-bx)} \end{aligned}$$
 得到
$$\begin{cases} A+B=0 \\ -Ab-aB=1 \\ a+b=1 \\ ab=-1 \end{cases}$$
 解得
$$\begin{cases} A = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ B = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ 由此得到 $\frac{x}{1-x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$

即斐波那契数列的通项公式为
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:lgwza:%E7%94%9F%E6%88%90%E5%87%BD%E6%95%B0%E7%90%86%E8%AE%BA_2_%E5%9F%BA%E6%9C%AC%E4%BE%8B%E5%AD%90&rev=1612939704

Last update: 2021/02/10 14:48