

# 生成函数理论2

## 基本例子

例1 设  $n \geq 1$   $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$  记  $a_n$  为  $X_n$  的子集个数, 求  $a_n$

解: 易知  $a_n = 2a_{n-1}$  ( $n \geq 1$ )  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  的普通生成函数为 
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 1 + 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + 2xf(x)$$
 所以 
$$f(x) = \frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$
 比较系数得  $a_n = 2^n$ .

例2 设有三种物体  $a, b, c$  令  $a_n$  表示从中不重复地选取  $n$  种物体的方法数, 则

$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  对应的普通生成函数可如下得出 
$$\begin{aligned} (1+ax)^0 + (1+ax)^1 + (1+ax)^2 + \dots &= \frac{1}{1-ax} \\ (1+bx)^0 + (1+bx)^1 + (1+bx)^2 + \dots &= \frac{1}{1-bx} \\ (1+cx)^0 + (1+cx)^1 + (1+cx)^2 + \dots &= \frac{1}{1-cx} \end{aligned}$$
 上式中  $x^i$  的系数表明选取  $i$  种物体的选取方式。例如  $x^2$  的系数为  $ab+bc+ca$  表明选取 2 种物体时选取的是  $a$  和  $b$  或者  $b$  和  $c$  或者  $c$  和  $a$  这三种方式。若仅仅求选取方法数, 则只令  $a=b=c=1$  即可。这时, 有 
$$\{a_n\} \leftrightarrow (1+x)^3$$
 这样就得到  $a_n = \binom{3}{n}$ .

现在改变规则: 设  $a$  可取 0, 1 或 2 次  $b$  可取 0 或 1 次  $c$  可取偶数次。令  $b_n$  表示选取  $n$  个物体的方法数, 则  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  对应的普通生成函数即 
$$\begin{aligned} (1+x+x^2)(1+x)(1+x^2+x^4+\dots) &= \frac{(1+x+x^2)}{1-x} \\ &= (1+x+x^2) \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (1+2x+3x^2) x^{2n} \end{aligned}$$
 从以上的生成函数不难看出, 当  $n \geq 2$  时,  $b_n = 3$

例3 给定正整数  $k$  令  $h_n$  表示方程  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$  的非负整数解的个数。我们已经知道  $h_n = \binom{n+k-1}{n}$  求  $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$  对应的普通生成函数的闭形式。

解令  $h(x)$  表示  $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$  的普通生成函数, 则有 
$$\begin{aligned} h(x) &= \underbrace{(1+x+x^2+\dots)(1+x+x^2+\dots)\dots(1+x+x^2+\dots)}_{\text{k 个}} \\ &= \left( \sum_{i=1}^{\infty} x^i \right)^k = \frac{1}{(1-x)^k} \end{aligned}$$
 \*\*推论 4\*\* 
$$\left( \binom{n+k-1}{n} \right)_{n=0}^{\infty} \leftrightarrow \frac{1}{(1-x)^k}$$

例5 从数量不限的苹果、香蕉、橘子和梨中, 选取  $n$  个水果装成一袋, 且选取的苹果数是偶数, 香蕉数是 5 的倍数, 橘子最多有 4 个, 而梨最多有 1 个。记这样的装法有  $h_n$  种, 求  $h_n$

解令  $g(x)$  为  $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$  的普通生成函数, 则 
$$\begin{aligned} g(x) &= (1+x^2+x^4+\dots)(1+x^5+x^{10}+\dots)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x) \\ &= \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1-x^5}{1-x} \cdot (1+x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{n} x^n \end{aligned}$$
 从而由推论 4 有  $h_n = n+1$

例6 推导斐波那契数列的通项公式, 其中  $a_0=0, a_1=1, a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$  ( $n > 1$ )

解设  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  的普通生成函数是  $f(x)$  那么根据其递推式, 可以得到一个有关  $f(x)$  的方程  $f(x) = xf(x) + x^2f(x) - a_0x + a_1x + a_0$  那么解得 
$$f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$
 用待定系数法对分母降次  $f(x) = \frac{A}{1-ax} + \frac{B}{1-bx} = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{A-Abx+B-aBx}{(1-ax)(1-bx)}$  得到 
$$\begin{cases} A+B=0 \\ -Ab-aB=1 \end{cases}$$

$$a+b=1$$

$$ab=-1 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} A=\frac{1}{\sqrt{5}} \\ B=-\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$b=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \text{ 由此得到 } \frac{x}{1-x-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

$$x^2}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

即斐波那契数列的通项公式为 
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: [https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal\\_string:lgwza:%E7%94%9F%E6%88%90%E5%87%BD%E6%95%B0%E7%90%86%E8%AE%BA\\_2\\_%E5%9F%BA%E6%9C%AC%E4%BE%8B%E5%AD%90&rev=1612939767](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:lgwza:%E7%94%9F%E6%88%90%E5%87%BD%E6%95%B0%E7%90%86%E8%AE%BA_2_%E5%9F%BA%E6%9C%AC%E4%BE%8B%E5%AD%90&rev=1612939767)

Last update: 2021/02/10 14:49