生成函数理论 3——普通生成函数

定义 1

若形式级数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与 $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 满足 $f(x)g(x)=1$则称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的乘法逆。

性质 2

形式级数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 有乘法逆的充分必要条件是 $a_0\ne 0$

性质 3

设形式级数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与 $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 互为复合逆, 并且 $a_0=0$则有 $b_0=0$ 且 $a_1\ne 0,b_1\ne 0$

事实 4

若形式级数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 满足 $f'(x)=0$则 $f(x)$ 是常数级数 a_0

事实 5

若形式级数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 满足 $f'(x)=f(x)$则 $f(x)=Ce^x$其中 C 是某个常数

事实 6

若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$则 $\{a_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数是 $$\frac{f(x)-a_0}{x}. $$

事实 7

若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$则 $\{a_{n+2}\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数是 $$\frac{f(x)-a_0-a_1x}{x^2}. $$

性质 8

若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$则 $\{a_{n+k}\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数是 $$\frac{f(x)-a_0-a_1x-\cdots-a_{k-1}x^{k-1}}{x^k}. $$

事实 9

若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，则 $\{na_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数是 $$ xDf, $$ 这里为了方便，用 xD 表示运算 $x\frac{d}{dx}$.

推论 10

$\{n\}_{n=0}^{\infty}\leftrightarrow xD\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{x}{(1-x)^2}$.

事实 11

若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，则 $\{n^ka_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数是 $$ (xD)^kf=(xD)[(xD)^{k-1}f]. $$

性质 12

若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，$P$ 是任一多项式，则 $\{P(n)a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数是 $$ P(xD)f. $$

例 13

求和 $$ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+4n+5}{n!} $$ 解 由于 $$ e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n, $$ 故 $$ ((xD)^2+4(xD)+5)e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+4n+5}{n!}x^n, $$ 即 $$ (x^2+5x+5)e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+4n+5}{n!}x^n. $$ 在上式中，令 $x=1$，即可得到 $$ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+4n+5}{n!}=11e. $$

性质 14

若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$（即 $f(x),g(x)$ 分别是数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 和 $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数），则 $f(x)g(x)$ 是数列 $\displaystyle \left\{\sum_{k=0}^na_kb_{n-k}\right\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数。

性质 15

若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$（即 $f(x)$ 是数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数），k 为正整数，则 $f^k(x)$ 是数列 $$ \left\{\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n}a_{n_1}a_{n_2}\cdots a_{n_k}\right\}_{n=0}^{\infty} $$ 的普通生成函数。

例 16

令 $f(n,k)$ 表示正整数 n 写成 k 个非负整数有序和的方法数，例如 $f(4,2)=5$，试求 $f(n,k)$ 的显式表达式。

解 数列 $\{1\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数是 $\frac{1}{1-x}$□故 $\frac{1}{(1-x)^k}$ 是数列 $$ \left\{\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n}1\right\}_{n=0}^{\infty} $$ 的普通生成函数。上面的数列就是 $\{f(n,k)\}_{n=0}^{\infty}$□从而 $$ f(n,k)=[x^n]\frac{1}{(1-x)^k}=\binom{n+k-1}{n}. $$

推论 17

若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$□$k$ 为正整数，则 $\frac{f(x)}{1-x}$ 是数列 $\displaystyle \left\{\sum_{k=0}^{n}a_k\right\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数。

例 18 （调和级数）

H_n 定义如下□ $$ H_n= \begin{cases} 0,&n=0,\\ 1+\frac 1 2+\cdots+\frac 1 n, &n\ge 1. \end{cases} $$ 求 $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数。

解 要求的函数是 $\displaystyle \frac{1}{1-x}$ 乘以 $\displaystyle \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 的普通生成函数。后者当然就是 $$ f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}. $$ 由 $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$□经过简单的计算就可以得到 $f(x)=-\ln(1-x)$□所以 $$ \sum_{n=0}^{\infty}H_nx^n=-\frac{1}{1-x}\ln(1-x)=\frac{1}{1-x}\ln\frac{1}{1-x}. $$

例 19

用硬币垒成一个 “ 喷泉 ” 如下：每行的硬币都连续摆在一起，除最下一行外，每枚硬币恰好置于其下面一行的两枚硬币之间。令 f_n 表示如此可能垒成的最下一行恰有 n 枚硬币的 “ 喷泉 ” 数，试求 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数。

解 首先 $f_0=1$□若只有一行，则数目为 1；若有多于一行，设从下面往上数第二行有 k 枚硬币，则 $1\le k\le n-1$□且这 k 枚硬币所在的位置有 $n-k$ 种，所以 $$ f_n=\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)f_k+1=\sum_{k=1}^{n}(n-k)f_k+1. $$ 令 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数为 $f(x)$□则 $$ \begin{align} f(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}f_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}(n-k)f_k+1\right)x^n\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^n(n-k)f_k\right)x^n+\sum_{n\ge 0}1\cdot x^n\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^n(n-k)f_k\right)x^n+\frac{1}{1-x}. \end{align} $$ 设 $g(x)=f(x)-1$□即 $g(x)$ 为 g_n 的普通生成函数，其中 $g_0=f_0-1=0$□而 $n\ge 1$ 时，$g_n=f_n$□则有 $$ \sum_{k=1}^n(n-k)f_k=\sum_{k=1}^n(n-k)g_k=\sum_{k=0}^n(n-k)g_k. $$ 然而 $\{n\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数是 $(xD)\frac{1}{1-x}=\frac{x}{(1-x)^2}$□所以 $$ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^n(n-k)g_k\right)x^n=\frac{x}{(1-x)^2}g(x)=\frac{x}{(1-x)^2}(f(x)-1). $$ 由 $$ f(x)=\frac{x}{(1-x)^2}(f(x)-1)+\frac{1}{1-x} $$ 解得 $$ f(x)=\frac{1-2x}{1-3x+x^2}. $$ 经计算，可求得 $$ f_n=\frac{-1+\sqrt 5}{2\sqrt 5}\left(\frac{3+\sqrt 5}{2}\right)^n+\frac{1+\sqrt5}{2\sqrt5}\left(\frac{3-\sqrt5}{2}\right)^n. $$