

生成函数理论 3——普通生成函数

定义 1

若形式级数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与 $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 满足 $f(x)g(x)=1$ 则称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的乘法逆。

性质 2

形式级数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 有乘法逆的充分必要条件是 $a_0\neq 0$

性质 3

设形式级数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与 $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 互为复合逆，并且 $a_0=0$ 则有 $b_0=0$ 且 $a_1\neq 0, b_1\neq 0$

事实 4

若形式级数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 满足 $f'(x)=0$ 则 $f(x)$ 是常数级数 a_0

事实 5

若形式级数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 满足 $f'(x)=f(x)$ 则 $f(x)=Ce^x$ 其中 C 是某个常数

事实 6

若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 则 $\{a_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数是 $\frac{f(x)-a_0}{x}$ 。

事实 7

若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 则 $\{a_{n+2}\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数是 $\frac{f(x)-a_0-a_1x}{x^2}$ 。

性质 8

若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 则 $\{a_{n+k}\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数是 $\frac{f(x)-a_0-a_1x-\cdots-a_{k-1}x^{k-1}}{x^k}$ 。

事实 9

若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 则 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数是 $\sum xDf$, 这里为了方便, 用 xD 表示运算 $x\frac{d}{dx}$.

推论 10

$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \rightarrow xD\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{x}{(1-x)^2}$.

事实 11

若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 则 $\{n^ka_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数是 $(xD)^kf=(xD)[(xD)^{k-1}f]$.

性质 12

若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ P 是任一多项式, 则 $\{P(n)a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数是 $P(xD)f$.

例 13

求和 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+4n+5}{n!}$ 解 由于 $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$, 故 $((xD)^2+4(xD)+5)e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+4n+5}{n!}x^n$, 即 $(x^2+5x+5)e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+4n+5}{n!}x^n$. 在上式中, 令 $x=1$ 即可得到 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+4n+5}{n!}=11e$.

性质 14

若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 即 $f(x), g(x)$ 分别是数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 和 $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数, 则 $f(x)g(x)$ 是数列 $\left\{\sum_{k=0}^na_kb_{n-k}\right\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数。

性质 15

若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 即 $f(x)$ 是数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数, k 为正整数, 则 $f^k(x)$ 是数列 $\left\{\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n}a_{n_1}a_{n_2}\cdots a_{n_k}\right\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数。

例 16

令 $f(n, k)$ 表示正整数 n 写成 k 个非负整数有序和的方法数, 例如 $f(4, 2)=5$ 试求 $f(n, k)$ 的显式表达式。

解 数列 $\{1\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数是 $\frac{1}{1-x}$ 故 $\frac{1}{(1-x)^k}$ 是数列 $\left\{\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} 1\right\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数。上面的数列就是 $\{f(n,k)\}_{n=0}^{\infty}$ 从而 $f(n,k) = [x^n] \frac{1}{(1-x)^k} = \binom{n+k-1}{n}$ 。

推论 17

若 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 且 k 为正整数，则 $\frac{f(x)}{1-x}$ 是数列 $\left\{\sum_{k=0}^n a_k\right\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数。

例 18 (调和级数)

H_n 定义如下 $H_n = \begin{cases} 0, & n=0, \\ 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, & n \geq 1. \end{cases}$ 求 $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数。

解 要求的函数是 $\frac{1}{1-x}$ 乘以 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 的普通生成函数。后者当然就是 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 。由 $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$ 经过简单的计算就可以得到 $f(x) = -\ln(1-x)$ 所以 $\sum_{n=0}^{\infty} H_n x^n = -\frac{1}{1-x} \ln(1-x) = \frac{1}{1-x} \ln \frac{1}{1-x}$ 。

例 19

用硬币垒成一个“喷泉”如下：每行的硬币都连续摆在一起，除最下一行外，每枚硬币恰好置于其下面一行的两枚硬币之间。令 f_n 表示如此可能垒成的最下一行恰有 n 枚硬币的“喷泉”数，试求 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数。

解 首先 $f_0 = 1$ 若只有一行，则数目为 1；若有多于一行，设从下面往上数第二行有 k 枚硬币，则 $1 \leq k \leq n-1$ 且这 k 枚硬币所在的位置有 $n-k$ 种，所以 $f_n = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) f_{k+1}$ 。令 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数为 $f(x)$ 则
$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} (n-k) f_{k+1} \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n (n-k) f_k \right) x^n + \sum_{n \geq 0} 1 \cdot x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n (n-k) f_k \right) x^n + \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$
 设 $g(x) = f(x) - \frac{1}{1-x}$ 即 $g(x)$ 为 g_n 的普通生成函数，其中 $g_0 = f_0 - 1 = 0$ 而 $n \geq 1$ 时， $g_n = f_n$ 则有 $\sum_{k=1}^n (n-k) f_k = \sum_{k=1}^n (n-k) g_k = \sum_{k=0}^n (n-k) g_k$ 。然而 $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的普通生成函数是 $(xD) \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}$ 所以 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (n-k) g_k \right) x^n = \frac{x}{(1-x)^2} g(x) = \frac{x}{(1-x)^2} (f(x) - \frac{1}{1-x})$ 。由 $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2} (f(x) - \frac{1}{1-x}) + \frac{1}{1-x}$ 解得 $f(x) = \frac{1-2x}{1-3x+x^2}$ 。经计算，可求得 $f_n = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} 5^{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)n} + \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} 5^{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)n}$ 。

From:
<https://wiki.cvvbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
https://wiki.cvvbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:lgwza:%E7%94%9F%E6%88%90%E5%87%BD%E6%95%B0%E7%90%86%E8%AE%BA_3_%E6%99%AE%E9%80%9A%E7%94%9F%E6%88%90%E5%87%BD%E6%95%B0

Last update: 2021/02/16 22:14