

Splay

如何用 Splay 维护二叉查找树

简介

Splay 是一种二叉查找树，它通过不断将某个结点旋转到根结点，使得整棵树仍然满足二叉查找树的性质，并且保持平衡而不至于退化为链，它由 Daniel Sleator 和 Robert Tarjan 发明。

结构

二叉查找树的性质

首先肯定是一棵二叉树！

能够在这棵树上查找某个值的性质：左子树任意结点的值 $<$ 根结点的值 $<$ 右子树任意结点的值。

结点维护信息

rt	tot	$\text{fa}[i]$	$\text{ch}[i][0/1]$	$\text{val}[i]$	$\text{cnt}[i]$	$\text{sz}[i]$
根结点编号	结点个数	父亲	左右儿子编号	结点权值	权值出现次数	子树大小

操作

基本操作

- $\text{maintain}(x)$ 在改变结点位置后，将结点 x 的 size 更新
- $\text{get}(x)$ 判断结点 x 是父亲结点的左儿子还是右儿子。
- $\text{clear}(x)$ 销毁结点 x

```
void maintain(int x) { sz[x] = sz[ch[x][0]] + sz[ch[x][1]] + cnt[x]; }
bool get(int x) { return x == ch[fa[x]][1]; }
void clear(int x) { ch[x][0] = ch[x][1] = fa[x] = val[x] = sz[x] = cnt[x] = 0; }
```

旋转操作

为了使 Splay 保持平衡而进行旋转操作，旋转的本质是将某个结点上移一个位置。

旋转需要保证

- 整棵 Splay 的中序遍历不变（不能破坏二叉查找树的性质）。
- 受影响的结点维护的信息依然正确有效。
- root 必须指向旋转后的根结点。

在 Splay 中旋转分为两种：左旋和右旋。



具体分析旋转步骤（假设需要旋转的结点为 x 其父亲为 y 以右旋为例）

1. 将 y 的左儿子指向 x 的右儿子，且 x 的右儿子的父亲指向 y
 $ch[y][0]=ch[x][1]; fa[ch[x][1]]=y;$
2. 将 x 的右儿子指向 y 且 y 的父亲指向 x
 $ch[x][chk^1]=y; fa[y]=x;$
3. 如果原来的 y 还有父亲 z 那么把 z 的某个儿子（原来 y 所在的儿子位置）指向 x 且 x 的父亲指向 z
 $fa[x]=z; if(z) ch[z][y==ch[z][1]]=x;$

```
void rotate(int x) {
    int y = fa[x], z = fa[y], chk = get(x);
    ch[y][chk] = ch[x][chk ^ 1];
    fa[ch[x][chk ^ 1]] = y;
    ch[x][chk ^ 1] = y;
    fa[y] = x;
    fa[x] = z;
    if (z) ch[z][y == ch[z][1]] = x;
    maintain(y);
    maintain(x);
}
```

Splay 操作

Splay 规定：每访问一个结点后都要强制将其旋转到根结点。此时旋转操作具体分为 6 种情况讨论（其中 x 为需要旋转到根的结点）



- 如果 x 的父亲是根结点，直接将 x 左旋或右旋（图 1,2）。
- 如果 x 的父亲不是根结点，且 x 和父亲的儿子类型相同，首先将其父亲左旋或右旋，然后将 x 右旋或左旋（图 3,4）。
- 如果 x 的父亲不是根结点，且 x 和父亲的儿子类型不同，将 x 左旋再右旋、或者右旋再左旋（图 5,6）。

分析起来一大串，其实代码一小段。大家可以自己模拟一下 6 种旋转情况，就能理解 Splay 的基本思想了。

```
void splay(int x) {
    for (int f = fa[x]; f = fa[x], f; rotate(x))
        if (fa[f]) rotate(get(x) == get(f) ? f : x);
    rt = x;
}
```

插入操作

插入操作是一个比较复杂的过程，具体步骤如下（插入的值为 k ）

- 如果树空了则直接插入根并退出。
- 如果当前结点的权值等于 k 则增加当前结点的大小并更新结点和父亲的信息，将当前结点进行 Splay 操作。
- 否则按照二叉查找树的性质向下找，找到空结点就插入即可（当然别忘了 Splay 操作）。

```

void ins(int k) {
    if (!rt) {
        val[++tot] = k;
        cnt[tot]++;
        rt = tot;
        maintain(rt);
        return;
    }
    int cnr = rt, f = 0;
    while (1) {
        if (val[cnr] == k) {
            cnt[cnr]++;
            maintain(cnr);
            maintain(f);
            splay(cnr);
            break;
        }
        f = cnr;
        cnr = ch[cnr][val[cnr] < k];
        if (!cnr) {
            val[++tot] = k;
            cnt[tot]++;
            fa[tot] = f;
            ch[f][val[f] < k] = tot;
            maintain(tot);
            maintain(f);
            splay(tot);
            break;
        }
    }
}

```

查询 x 的排名

根据二叉查找树的定义和性质，显然可以按照以下步骤查询 x 的排名：

- 如果 x 比当前结点权值小，向其左子树查找。
- 如果 x 比当前结点权值大，将答案加上左子树的大小和当前结点的大小，向其右子树查找。
- 如果 x 与当前结点的权值相同，将答案加 1 并返回。

注意最后需要进行 Splay 操作。

```

int rk(int k) {
    int res = 0, cnr = rt;

```

```
while (1) {
    if (k < val[cnr]) {
        cnr = ch[cnr][0];
    } else {
        res += sz[ch[cnr][0]];
        if (k == val[cnr]) {
            splay(cnr);
            return res + 1;
        }
        res += cnt[cnr];
        cnr = ch[cnr][1];
    }
}
```

查询排名 x 的数

设 k 为剩余排名，具体步骤如下：

- 如果左子树非空且剩余排名 k 不大于左子树的大小 $sz[0]$ 那么向左子树查找。
- 否则将 k 减去左子树和根的大小。如果此时 k 的值小于等于 0 ，则返回根结点的权值，否则继续向右子树查找。

```
int kth(int k) {
    int cnr = rt;
    while (1) {
        if (ch[cnr][0] && k <= sz[ch[cnr][0]]) {
            cnr = ch[cnr][0];
        } else {
            k -= cnt[cnr] + sz[ch[cnr][0]];
            if (k <= 0) {
                splay(cnr);
                return val[cnr];
            }
            cnr = ch[cnr][1];
        }
    }
}
```

查询前驱

前驱定义为小于 x 的最大的数，那么查询前驱可以转化为：将 x 插入（此时 x 已经在根的位置了），前驱即为 x 的左子树中最右边的结点，最后将 x 删除即可。

```
int pre() {
    int cnr = ch[rt][0];
    while (ch[cnr][1]) cnr = ch[cnr][1];
}
```

```
splay(cnr);
return cnr;
}
```

查询后继

后继定义为大于 x 的最小的数，查询方法和前驱类似， x 的右子树中最左边的结点。

```
int nxt() {
    int cnr = ch[rt][1];
    while (ch[cnr][0]) cnr = ch[cnr][0];
    splay(cnr);
    return cnr;
}
```

合并两棵树

合并两棵 Splay 树，设两棵树的根结点分别为 x 和 y ，那么我们要求 x 树中的最大值小于 y 树中的最小值。合并操作如下：

- 如果 x 和 y 其中之一或两者都为空树，直接返回不为空的那一棵树的根结点或空树。
- 否则将 x 树中的最大值 Splay 到根，然后把它的右子树设置为 y 并更新结点的信息，然后返回这个结点。

From:

<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:

https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:lgwza:splay&rev=1598105151

Last update: 2020/08/22 22:05