

Splay

如何用 `Splay` 维护二叉查找树

简介

`Splay` 是一种二叉查找树，它通过不断将某个结点旋转到根结点，使得整棵树仍然满足二叉查找树的性质，并且保持平衡而不至于退化为链，它由 Daniel Sleator 和 Robert Tarjan 发明。

结构

二叉查找树的性质

首先肯定是一棵二叉树！

能够在这棵树上查找某个值的性质：左子树任意结点的值 $<$ 根结点的值 $<$ 右子树任意结点的值。

结点维护信息

<code>rt</code>	<code>tot</code>	<code>fa[i]</code>	<code>ch[i][0/1]</code>	<code>val[i]</code>	<code>cnt[i]</code>	<code>sz[i]</code>
根结点编号	结点个数	父亲	左右儿子编号	结点权值	权值出现次数	子树大小

操作

基本操作

- `maintain(x)` 在改变结点位置后，将结点 `x` 的 `size` 更新
- `get(x)` 判断结点 `x` 是父亲结点的左儿子还是右儿子。
- `clear(x)` 销毁结点 `x`

```
void maintain(int x) { sz[x] = sz[ch[x][0]] + sz[ch[x][1]] + cnt[x]; }
bool get(int x) { return x == ch[fa[x]][1]; }
void clear(int x) { ch[x][0] = ch[x][1] = fa[x] = val[x] = sz[x] = cnt[x] = 0; }
```

旋转操作

为了使 `Splay` 保持平衡而进行旋转操作，旋转的本质是将某个结点上移一个位置。

旋转需要保证

- 整棵 `Splay` 的中序遍历不变（不能破坏二叉查找树的性质）。
- 受影响的结点维护的信息依然正确有效。
- `root` 必须指向旋转后的根结点。

在 Splay 中旋转分为两种：左旋和右旋。



具体分析旋转步骤（假设需要旋转的结点为 x 其父亲为 y 以右旋为例）

1. 将 y 的左儿子指向 x 的右儿子，且 x 的右儿子的父亲指向 y
 $\text{ch}[y][0] = \text{ch}[x][1]; \text{fa}[\text{ch}[x][1]] = y;$
2. 将 x 的右儿子指向 y 且 y 的父亲指向 x
 $\text{ch}[x][\text{chk}^1] = y; \text{fa}[y] = x;$
3. 如果原来的 y 还有父亲 z 那么把 z 的某个儿子（原来 y 所在的儿子位置）指向 x 且 x 的父亲指向 z
 $\text{fa}[x] = z; \text{if}(z) \text{ch}[z][y == \text{ch}[z][1]] = x;$

```
void rotate(int x) {
    int y = fa[x], z = fa[y], chk = get(x);
    ch[y][chk] = ch[x][chk ^ 1];
    fa[ch[x][chk ^ 1]] = y;
    ch[x][chk ^ 1] = y;
    fa[y] = x;
    fa[x] = z;
    if (z) ch[z][y == ch[z][1]] = x;
    maintain(y);
    maintain(x);
}
```

Splay 操作

Splay 规定：每访问一个结点后都要强制将其旋转到根结点。此时旋转操作具体分为 6 种情况讨论（其中 x 为需要旋转到根的结点）



- 如果 x 的父亲是根结点，直接将 x 左旋或右旋（图 1,2）。
- 如果 x 的父亲不是根结点，且 x 和父亲的儿子类型相同，首先将其父亲左旋或右旋，然后将 x 右旋或左旋（图 3,4）。
- 如果 x 的父亲不是根结点，且 x 和父亲的儿子类型不同，将 x 左旋再右旋、或者右旋再左旋（图 5,6）。

分析起来一大串，其实代码一小段。大家可以自己模拟一下 6 种旋转情况，就能理解 Splay 的基本思想了。

```
void splay(int x) {
    for (int f = fa[x]; f = fa[x], f; rotate(x))
        if (fa[f]) rotate(get(x) == get(f) ? f : x);
    rt = x;
}
```

插入操作

插入操作是一个比较复杂的过程，具体步骤如下（插入的值为 k ）

- 如果树空了则直接插入根并退出。
- 如果当前结点的权值等于 k 则增加当前结点的大小并更新结点和父亲的信息，将当前结点进行 Splay 操作。
- 否则按照二叉查找树的性质向下找，找到空结点就插入即可（当然别忘了 Splay 操作）。

```
void ins(int k) {
    if (!rt) {
        val[++tot] = k;
        cnt[tot]++;
        rt = tot;
        maintain(rt);
        return;
    }
    int cnr = rt, f = 0;
    while (1) {
        if (val[cnr] == k) {
            cnt[cnr]++;
            maintain(cnr);
            maintain(f);
            splay(cnr);
            break;
        }
        f = cnr;
        cnr = ch[cnr][val[cnr] < k];
        if (!cnr) {
            val[++tot] = k;
            cnt[tot]++;
            fa[tot] = f;
            ch[f][val[f] < k] = tot;
            maintain(tot);
            maintain(f);
            splay(tot);
            break;
        }
    }
}
```

查询 x 的排名

根据二叉查找树的定义和性质，显然可以按照以下步骤查询 x 的排名：

- 如果 x 比当前结点权值小，向其左子树查找。
- 如果 x 比当前结点权值大，将答案加上左子树 $size$ 和当前结点 cnt 的大小，向其右子树查找。
- 如果 x 与当前结点的权值相同，将答案加 1 并返回。

注意最后需要进行 Splay 操作。

```
int rk(int k) {
    int res = 0, cnr = rt;
```

```
while (1) {
    if (k < val[cnr]) {
        cnr = ch[cnr][0];
    } else {
        res += sz[ch[cnr][0]];
        if (k == val[cnr]) {
            splay(cnr);
            return res + 1;
        }
        res += cnt[cnr];
        cnr = ch[cnr][1];
    }
}
```

查询排名 x 的数

设 k 为剩余排名，具体步骤如下：

- 如果左子树非空且剩余排名 k 不大于左子树的大小 $size$ 那么向左子树查找。
- 否则将 k 减去左子树和根的大小。如果此时 k 的值小于等于 0 ，则返回根结点的权值，否则继续向右子树查找。

```
int kth(int k) {
    int cnr = rt;
    while (1) {
        if (ch[cnr][0] && k <= sz[ch[cnr][0]]) {
            cnr = ch[cnr][0];
        } else {
            k -= cnt[cnr] + sz[ch[cnr][0]];
            if (k <= 0) {
                splay(cnr);
                return val[cnr];
            }
            cnr = ch[cnr][1];
        }
    }
}
```

查询前驱

前驱定义为小于 x 的最大的数，那么查询前驱可以转化为：将 x 插入（此时 x 已经在根的位置了），前驱即为 x 的左子树中最右边的结点，最后将 x 删除即可。

```
int pre() {
    int cnr = ch[rt][0];
    while (ch[cnr][1]) cnr = ch[cnr][1];
}
```

```
splay(cnr);
return cnr;
}
```

查询后继

后继定义为大于 x 的最小的数，查询方法和前驱类似， x 的右子树中最左边的结点。

```
int nxt() {
    int cnr = ch[rt][1];
    while (ch[cnr][0]) cnr = ch[cnr][0];
    splay(cnr);
    return cnr;
}
```

合并两棵树

合并两棵 Splay 树，设两棵树的根结点分别为 x 和 y ，那么我们要求 x 树中的最大值小于 y 树中的最小值。合并操作如下：

- 如果 x 和 y 其中之一或两者都为空树，直接返回不为空的那一棵树的根结点或空树。
- 否则将 x 树中的最大值 Splay 到根，然后把它的右子树设置为 y 并更新结点的信息，然后返回这个结点。

删除操作

删除操作也是一个比较复杂的操作，具体步骤如下：

首先将 x 旋转到根的位置。

- 如果 $\text{cnt}[x] > 1$ 有不只一个 x ，那么将 $\text{cnt}[x]$ 减 1 并退出。
- 否则，合并它的左右两棵子树即可。

```
void del(int k) {
    rk(k);
    if (cnt[rt] > 1) {
        cnt[rt]--;
        maintain(rt);
        return;
    }
    if (!ch[rt][0] && !ch[rt][1]) {
        clear(rt);
        rt = 0;
        return;
    }
    if (!ch[rt][0]) {
        int cnr = rt;
        rt = ch[rt][1];
    }
```

```
    fa[rt] = 0;
    clear(cnr);
    return;
}
if (!ch[rt][1]) {
    int cnr = rt;
    rt = ch[rt][0];
    fa[rt] = 0;
    clear(cnr);
    return;
}
int cnr = rt, x = pre();
splay(x);
fa[ch[cnr][1]] = x;
ch[x][1] = ch[cnr][1];
clear(cnr);
maintain(rt);
}
</hidden>
```

完整代码

```
#include <cstdio>
const int N = 100005;
int rt, tot, fa[N], ch[N][2], val[N], cnt[N], sz[N];
struct Splay {
    void maintain(int x) { sz[x] = sz[ch[x][0]] + sz[ch[x][1]] + cnt[x]; }
    bool get(int x) { return x == ch[fa[x]][1]; }
    void clear(int x) {
        ch[x][0] = ch[x][1] = fa[x] = val[x] = sz[x] = cnt[x] = 0;
    }
    void rotate(int x) {
        int y = fa[x], z = fa[y], chk = get(x);
        ch[y][chk] = ch[x][chk ^ 1];
        fa[ch[x][chk ^ 1]] = y;
        ch[x][chk ^ 1] = z;
        fa[y] = x;
        fa[x] = z;
        if (z) ch[z][y == ch[z][1]] = x;
        maintain(x);
        maintain(y);
    }
    void splay(int x) {
        for (int f = fa[x]; f = fa[x], f; rotate(x))
            if (fa[f]) rotate(get(x) == get(f) ? f : x);
        rt = x;
    }
    void ins(int k) {
```

```

if (!rt) {
    val[++tot] = k;
    cnt[tot]++;
    rt = tot;
    maintain(rt);
    return;
}
int cnr = rt, f = 0;
while (1) {
    if (val[cnr] == k) {
        cnt[cnr]++;
        maintain(cnr);
        maintain(f);
        splay(cnr);
        break;
    }
    f = cnr;
    cnr = ch[cnr][val[cnr] < k];
    if (!cnr) {
        val[++tot] = k;
        cnt[tot]++;
        fa[tot] = f;
        ch[f][val[f] < k] = tot;
        maintain(tot);
        maintain(f);
        splay(tot);
        break;
    }
}
}

int rk(int k) {
    int res = 0, cnr = rt;
    while (1) {
        if (k < val[cnr]) {
            cnr = ch[cnr][0];
        } else {
            res += sz[ch[cnr][0]];
            if (k == val[cnr]) {
                splay(cnr);
                return res + 1;
            }
            res += cnt[cnr];
            cnr = ch[cnr][1];
        }
    }
}

int kth(int k) {
    int cnr = rt;
    while (1) {
        if (ch[cnr][0] && k <= sz[ch[cnr][0]]) {
            cnr = ch[cnr][0];
        }
    }
}

```

```
    } else {
        k -= cnt[cnr] + sz[ch[cnr][0]];
        if (k <= 0) {
            splay(cnr);
            return val[cnr];
        }
        cnr = ch[cnr][1];
    }
}
}
int pre() {
    int cnr = ch[rt][0];
    while (ch[cnr][1]) cnr = ch[cnr][1];
    splay(cnr);
    return cnr;
}
int nxt() {
    int cnr = ch[rt][1];
    while (ch[cnr][0]) cnr = ch[cnr][0];
    splay(cnr);
    return cnr;
}
void del(int k) {
    rk(k);
    if (cnt[rt] > 1) {
        cnt[rt]--;
        maintain(rt);
        return;
    }
    if (!ch[rt][0] && !ch[rt][1]) {
        clear(rt);
        rt = 0;
        return;
    }
    if (!ch[rt][0]) {
        int cnr = rt;
        rt = ch[rt][1];
        fa[rt] = 0;
        clear(cnr);
        return;
    }
    if (!ch[rt][1]) {
        int cnr = rt;
        rt = ch[rt][0];
        fa[rt] = 0;
        clear(cnr);
        return;
    }
    int cnr = rt;
```



```
int x = pre();
splay(x);
fa[ch[cnr][1]] = x;
ch[x][1] = ch[cnr][1];
clear(cnr);
maintain(rt);
}
} tree;

int main() {
int n, opt, x;
for (scanf("%d", &n); n; --n) {
scanf("%d%d", &opt, &x);
if (opt == 1)
tree.ins(x);
else if (opt == 2)
tree.del(x);
else if (opt == 3)
printf("%d\n", tree.rk(x));
else if (opt == 4)
prin
```

例题

以下题目都是裸的 Splay 维护二叉查找树。

【模板】普通平衡树

【模板】文艺平衡树

[\[HNOI2002\]营业额统计](#)

[\[HNOI2004\]宠物收养所](#)

练习题

[\[Cerc2007\]robotic sort 机械排序](#)

[二逼平衡树（树套树）](#)

[bzoj 2827 千山鸟飞绝](#)

[\[Lydsy1706 月赛\]K 小值查询](#)

参考链接

[OI Wiki](#)

Last
update:
2020/08/22 2020-2021:teams:legal_string:lgwza:splay https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:lgwza:splay&rev=1598105457
22:10

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - **CVBB ACM Team**

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:legal_string:lgwza:splay&rev=1598105457 

Last update: **2020/08/22 22:10**