

# 生成函数

这几周比较忙，还有很多写得不详细的地方。  
本文的知识点和例题可能比较片面。

## 形式幂级数

$A(x) = \sum_{i \geq 0} a_i x^i$  用  $[x^n]A(x)$  表示  $A(x)$  的  $n$  次项系数  $a_n$

实际运算时，通常只需要保留次数不超过  $n-1$  的项进行计算  $(\%x^n)$

## 有标号和无标号

3个点的无标号简单无向图有4种

3个点的有标号简单无向图有8种

## 普通生成函数(OGF)

数列  $A_0, A_1, \dots$  的普通生成函数定义为形式幂级数  $A(x) = \sum_{i \geq 0} A_i x^i$  一个例子：

考虑  $A_i, B_i$  为两个背包，如何合并这两个背包  $C_k = \sum_{i+j=k} A_i B_j$  对应于生成函数，  
则有  $C(x) = A(x)B(x)$  一个容量为  $a$  的物品的完全背包  $\sum_{i \geq 0} x^{ai}$  写成封闭形式  $\frac{1}{1-x^a}$

## 指数生成函数(EGF)

数列  $A_0, A_1, \dots$  的指数生成函数定义为形式幂级数  $A(x) = \sum_{i \geq 0} A_i \frac{x^i}{i!}$

EGF常用来解决带标号问题。

从  $k$  个标号里选出  $i$  个标号给  $A_i$  中的  $i$  个元素  $k-i$  个标号给  $B_j$  中的  $j$  个元素。这样相当于对  $C_k$  中的元素编号。则  $C_k$  中带标号方案数

$$C_k = \sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!(k-i)!} A_i B_j$$

$$\frac{C_k}{k!} = \sum_{i+j=k} \frac{A_i}{i!} \frac{B_j}{j!}$$

对应于生成函数，则有  $C(x) = A(x)B(x)$

## 指数与对数函数

$$\ln(1-A(x)) = -\sum_{i \geq 1} \frac{A(x)^i}{i} \quad \exp(A(x)) = \sum_{i \geq 0} \frac{A(x)^i}{i!}$$

## 例题

籀论文中的一道例题：完全背包计数

若干种不同的物品，体积为 $i$ 的物品有 $a_i$ 种，每种物品有无限个。求装满体积为 $n$ 的背包的方案数 $\sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{n!}{i!} \cdot \frac{1}{n!}$

体积为 $i$ 的物品的生成函数  $\frac{1}{1-x^i}$  将所有物品的生成函数相乘

$$F(x) = \prod_{i=1}^n \left( \frac{1}{1-x^i} \right)^{a_i}$$

$$\ln F(x) = \sum_{i=1}^n a_i \ln(1-x^i)$$

对于右边来说，将 $x^i$ 代入 $\ln(1-x)$ 的展开式得

$$\ln F(x) = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j \geq 1} \frac{x^{ij}}{j} = \sum_{T \geq 0} \sum_{i|T} \frac{a_i}{i} x^T$$

因为 $T$ 最多到 $n$ ，根据调和级数，我们可以在 $O(n \log n)$ 内求出 $\ln F(x)$ ，然后多项式 $\exp$ 一下，可以得到 $F(x)$

## SDOI2017遗忘的集合

给定一个集合的完全背包 $f(1) \sim f(n)$ 求这个集合。集合中元素最大为 $n$

用 $a_i$ 表示 $i$ 这个元素是否为集合中的元素。

则整个集合中元素的生成函数  $F(x) = \prod_{i=1}^n \left( \frac{1}{1-x^i} \right)^{a_i}$  与上一题同样可得  $\ln F(x) = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j \geq 1} \frac{x^{ij}}{j} = \sum_{T \geq 0} \sum_{i|T} \frac{a_i}{i} x^T$

$$n[x^n] \ln F(x) = \sum_{i|n} a_i$$

莫比乌斯反演一下就可以得到  $a_i$

## 付公主的背包

和完全背包计数很像

## 第一类斯特林数 · 行

$S_n^m$ 表示把 $n$ 个不同的元素构成 $m$ 个圆排列的方案数（不能有空的环）

$S_n(x)$ 表示第 $n$ 行斯特林数的生成函数  $S_n(x) = \sum_{i=0}^n S_n^i x^i$

$$S_n^i = S_{n-1}^{i-1} + (n-1) S_{n-1}^i$$

$$S_n(x) = x S_{n-1}(x) + (n-1) S_{n-1}(x) = (x+n-1) S_{n-1}(x) = \prod_{i=0}^{n-1} (x+i)$$

可以分治FFT在 $O(n \log^2 n)$ 的复杂度内求出，也有 $O(n \log n)$ 的求法。

## 第一类斯特林数 · 列

大概是采用了Zory的做法

考虑 $n$ 个有标号元素组成的环的方案数 $(n-1)!$

考虑取一个带标号环，可以表示为EGF  $\sum_{i \geq 1} (i-1)! \frac{x^i}{i!}$  依次取 $m$ 个环，方案

数  $\frac{1}{m!} F(x) = \frac{1}{m!} \left( \sum_{i \geq 1} (i-1)! \frac{x^i}{i!} \right)^m$

## 第二类斯特林数 · 行

$S_n^m$  表示把  $n$  个不同的元素分到  $m$  个相同的集合中（不能有空集）的方案数

把  $m$  个集合看成不同的，枚举几个集合没放，得到容斥的式子后

$$S_n^m = \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (-1)^{m-i} i^n \\ = \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^{m-i} i^n}{(m-i)!} = \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i}{i!} \frac{(m-i)^n}{(m-i)!}$$

可以让  $\sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i}{i!}$  和  $\sum_{i=0}^m \frac{i^n}{i!}$  做卷积

## 第二类斯特林数 · 列

大概是采用了 **Great\_Influence** 的做法

$S_m(x)$  表示第  $m$  列斯特林数的生成函数  $S_m(x) = \sum_{i=0}^{\infty} S_i^m x^i$

$S_i^m = S_{i-1}^{m-1} + m S_{i-1}^m$  可以得到  $S_m(x) = x S_{m-1}(x) + x m S_m(x)$

$$S_m(x) = \frac{x}{1-mx} S_{m-1}(x) = \frac{x^m}{\prod_{i=1}^m (1-ix)}$$

$\prod_{i=1}^m (1-ix)$  可以分治FFT在  $O(n \log^2 n)$  的复杂度内求出，也有  $O(n \log n)$  的求法。

## 2020牛客寒假算法基础集训营4 二维跑步

向左有2种跑法，向右有3种跑法，也可以原地不动。

如果用  $F[i][j]$  表示跑了  $i$  步，当前在位置  $j$  的方案数  $F[i][j] = 3F[i-1][j-1] + F[i-1][j] + 2F[i-1][j+1]$  令生成函数  $F_i(x) = \sum F[i][j] x^j$  那么有

$$F_n(x) = 3x F_{n-1}(x) + F_{n-1}(x) + \frac{2}{x} F_{n-1}(x) = (3x+1+\frac{2}{x}) F_{n-1}(x) = (3x^2+x+2) F_{n-1}(x)$$

为了更方便计算  $x^n F_n(x) = (3x^2+x+2)^n$  对于右边，可以先求所有单位根  $w$  的  $(3w^2+w+2)^n$  然后插值得到  $x^n F_n(x)$

复杂度  $O(n \log n)$  标算用了更快的做法。

## 指数生成函数

### POJ Blocks

用RBGY四种颜色涂满长度为  $n$  的序列 RG 这两种颜色需要出现偶数次。

这是一个带标号组合问题，标号可以理解为颜色的位置。

考虑R涂满长度为  $0 \sim n$  的序列的方案数为 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1...

那么R的指数生成函数  $\sum_{i \geq 0} \frac{x^{2i}}{(2i)!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  考虑B涂满长度为  $0 \sim n$  的序列的方案数为 1, 1, 1, 1, 1...

那么R的指数生成函数  $\sum_{i \geq 0} \frac{x^i}{i!} = e^x$  将四种颜色的生成函数乘起来  $F(x) = \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 e^{2x} = \frac{1}{4} (e^{2x} + 1)^2 = \frac{1}{4} (e^{4x} + 2e^{2x} + 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{4} e^{4x}$   $n \geq 1$  时，  $n! [x^n] F(x) = 4^{n-1} + 2^{n-1}$  可以用快速幂求出。

或者  $f[i][j] (0 \leq j \leq 3)$  表示dp到第  $i$  个位置 RG 分别放了奇数次/偶数次得方案数，可以矩阵快速幂优化。

## HUD 排列组合

有 $n$ 种物品，并且知道每种物品的数量  $a_i$  要求从中选出 $m$ 件物品的排列数。例如有两种物品A,B并且数量都是1，从中选2件物品，则排列有“AB”,“BA”两种 $\sum_{i=0}^m \frac{a_i!}{i!} x^i$

这是一个带标号组合问题，标号可以理解为某个物品的位置。

第 $i$ 个物品的EGF  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i!}{i!} x^i$  将 $n$ 个物品的EGF乘起来得 $F(x)$  则答案为  $m! [x^m]F(x)$

## luoguP4841 [集训队作业2013]城市规划

### 题意

求 $n$ 个点的简单有标号无向连通图数目模 $1004535809$ 。

### 题解

设 $f(n)$ 为点数为 $n$ 的无向连通图的数量 $g(n)$ 为点数为 $n$ 的无向图的数量。那么有

$$g(n) = \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} f(i) g(n-i)$$

，可以看成枚举一号节点所在连通块大小。

代入 $g(n) = 2^{\binom{n}{2}}$

$$2^{\binom{n}{2}} = \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} f(i) 2^{\binom{n-i}{2}}$$

$$\frac{2^{\binom{n}{2}}}{(n-1)!} = \sum_{i=1}^n \frac{f(i)}{(i-1)!} \frac{2^{\binom{n-i}{2}}}{(n-i)!}$$

这是一个卷积，于是定义

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{(n-1)!} x^n$$

$$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!} x^n$$

$$H(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{\binom{n}{2}}}{(n-1)!} x^n$$

则

$$F = H * G^{-1} \pmod{x^{n+1}}$$

## CF438E The Child and Binary Tree

### 题意

一棵树的权值为其点权和。点权在正整数集合 $\{c_1, \dots, c_n\}$ 中，求不同的有根二叉树的权值和模 $998244353$ 。

## 题解

设  $f_i$  表示点权和为  $i$  的二叉树个数  $g_i$  表示权值  $i$  是否包含在  $\{c_1, \dots, c_n\}$  中。  
 $f_i$  可由枚举根的点权和左右子树得到

$$f_0 = 1$$

$$f_n = \sum_{i=1}^n g_i \sum_{j=1}^{n-i} f_j f_{n-i-j} \quad (n > 0)$$

令  $F$  表示  $f$  的生成函数  $G$  表示  $g$  的生成函数，那么

$$F = G * F^2 + 1$$

解得

$$F = \frac{1 \pm \sqrt{1-4G}}{2G}$$

讨论

$$\text{取正号} \quad \lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \infty \quad (\text{舍去})$$

$$\text{取负号} \quad \lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 1 \quad (\text{满足})$$

于是得

$$F = \frac{1 - \sqrt{1-4G}}{2G}$$

$$F = \frac{2}{1 + \sqrt{1-4G}}$$

## luoguP4451 [国家集训队]整数的lqp拆分

### 题意

$F_n$  表示斐波那契数列第  $n$  项。对给定  $n$  拆分指  $m > 0, a_1, a_2, \dots, a_m > 0$ ,  
 且  $a_1 + a_2 + \dots + a_m = n$  的有序集合，拆分的权值为  $F_{a_1} F_{a_2} \dots F_{a_m}$  求所有拆分  
 权值之和模  $1000000007$ 。

### 题解

斐波那契数列的生成函数为

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

拆分为  $k$  个数，生成函数为  $F(x)^k$  于是答案的生成函数为

$$G(x) = \sum_{i=0}^{\infty} F(x)^i$$

$$G = \frac{1}{1-F(x)} = \frac{1-x-x^2}{1-2x-x^2}$$

分母  $\frac{1}{1-2x-x^2}$  写成递推式

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$$

乘上分子

$$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$$

解递推特征方程，得

$$x_1 = -\sqrt{2} + 1, x_2 = \sqrt{2} + 1$$

设通项公式为

$$a_n = c_1(-\sqrt{2} + 1)^n + c_2(\sqrt{2} + 1)^n$$

代入  $n=0, n=1$  解得

$$c_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}, c_2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}$$

$\sqrt{2}$  在模  $10^9+7$  下有二次剩余  $(59713600)$ ，所以最终答案

$$a_n \equiv 485071604 \times 940286408^n + 514928404 \times 59713601^n \pmod{10^9+7}$$

From:  
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:  
[https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:looking\\_up\\_at\\_the\\_starry\\_sky:%E7%94%9F%E6%88%90%E5%87%BD%E6%95%B0&rev=1590928912](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:looking_up_at_the_starry_sky:%E7%94%9F%E6%88%90%E5%87%BD%E6%95%B0&rev=1590928912)

Last update: 2020/05/31 20:41