

格式

1. 标题按一级、二级依次排列，有些地方如例题中的指型生成函数写成标题，便于检索
2. 公式两边接汉字请空格
3. $\%x^n\!\!\!\mod x^n$

内容

1. 题目讲得太难了吧，从基础开始循序渐进，在定义和难题之间应该有一些基本应用及简单题
2. 出现了一些 typo 如 HUO 排列组合

总之等不忙的时候再完善一下吧~

生成函数

这几周比较忙，还有很多写得不详细的地方。

本文的知识点和例题可能比较片面。

参考了很多其他人写的，还没来得及写参考文献。

形式幂级数

$A(x) = \sum_{i \geq 0} a_i x^i$ 用 $[x^n]A(x)$ 表示 $A(x)$ 的 n 次项系数 a_n

实际运算时，通常只需要保留次数不超过 $n-1$ 的项进行计算 $(\%x^n)$

有标号和无标号

3个点的无标号简单无向图有4种

3个点的有标号简单无向图有8种

普通生成函数(OGF)

数列 A_0, A_1, \dots 的普通生成函数定义为形式幂级数 $A(x) = \sum_{i \geq 0} A_i x^i$ 一个例子：

考虑 $A_i B_i$ 为两个背包，如何合并这两个背包 $C_k = \sum_{i+j=k} A_i B_j$ 对应于生成函数，则有 $C(x) = A(x)B(x)$ 一个容量为 a 的物品的完全背包 $\sum_{i \geq 0} x^{ai}$ 写成封闭形式 $\frac{1}{1-x^a}$

指数生成函数(EGF)

数列 A_0, A_1, \dots 的指数生成函数定义为形式幂级数 $A(x) = \sum_{i \geq 0} A_i \frac{x^i}{i!}$

EGF常用来解决带标号问题。

从 \$k\$ 个标号里选出 \$i\$ 个标号给 \$A_i\$ 中的 \$i\$ 个元素，从 \$k-i\$ 个标号给 \$B_j\$ 中的 \$j\$ 个元素。这样相当于对 \$C_k\$ 中的元素编号。则 \$C_k\$ 中带标号方案数

$$\sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!(k-i)!} A_i B_j$$

$$\frac{1}{k!} \sum_{i+j=k} \frac{A_i}{i!} \frac{B_j}{j!}$$

对应于生成函数，则有 $C(x) = A(x)B(x)$

指数与对数函数

$$\ln(1-A(x)) = -\sum_{i \geq 1} \frac{A(x)^i}{i} \quad \exp(A(x)) = \sum_{i \geq 0} \frac{A(x)^i}{i!}$$

例题

模论文中的一道例题：完全背包计数

若干种不同的物品，体积为 \$i\$ 的物品有 \$a_i\$ 种，每种物品有无限个。求装满体积为 \$n\$ 的背包的方案数 \$(a_i, n \leq 10^5)\$

体积为 \$i\$ 的物品的生成函数 $\frac{1}{1-x^i}$ 将所有物品的生成函数相乘

$$F(x) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{1-x^i} \right)^{a_i}$$

$$\ln F(x) = \sum_{i=1}^n a_i \ln(1-x^i)$$

对于右边来说，将 x^i 代入 $\ln(1-x)$ 的展开式得

$$\begin{aligned} \ln F(x) &= \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j \geq 1} \frac{x^{ij}}{j} \\ &= \sum_{T \geq 0} \sum_{i|T} a_i x^T \end{aligned}$$

因为 \$T\$ 最多到 \$n\$，根据调和级数，我们可以在 \$O(n \log n)\$ 内求出 \$\ln F(x)\$，然后用多项式 \$\exp\$ 一下，可以得到 \$F(x)\$。

SDOI2017 遗忘的集合

给定一个集合的完全背包 $f(1) \sim f(n)$ 求这个集合。集合中元素最大为 \$n\$

用 \$a_i\$ 表示 \$i\$ 这个元素是否为集合中的元素。

则整个集合中元素的生成函数 $F(x) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{1-x^i} \right)^{a_i}$ 与上一题同样可得 $\ln F(x) = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j \geq 1} \frac{x^{ij}}{j} = \sum_{T \geq 0} \sum_{i|T} a_i x^T$

$$n[x^n] \ln F(x) = \sum_{i|n} a_i$$

莫比乌斯反演一下就可以得到 a_i

付公主的背包

和完全背包计数很像

第一类斯特林数 · 行

\$S_n^m\$ 表示把 \$n\$ 个不同的元素构成 \$m\$ 个圆排列的方案数（不能有空的环）

$S_n(x)$ 表示第n行斯特林数的生成函数 $S_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} S_{n,i} x^i$

$S_n^i = S_{n-1}^{i-1} + (n-1)S_{n-1}^i$

$S_n(x) = xS_{n-1}(x) + (n-1)S_{n-1}(x) \cdot (x+n-1)S_{n-1}(x) = \prod_{i=0}^{n-1} (x+i)$

可以分治FFT在 $O(n \log^2 n)$ 的复杂度内求出，也有 $O(n \log n)$ 的求法。

第一类斯特林数 · 列

大概是采用了 Zory 的做法

考虑 n 个有标号元素组成的环的方案数 $(n-1)!$

考虑取一个带标号环，可以表示为 EGF $\sum_{i \geq 1} (i-1)! \frac{x^i}{i!}$ 依次取 m 个环，方案数 $/m!$ $F(x) = \frac{1}{m!} \left(\sum_{i \geq 1} (i-1)! \frac{x^i}{i!} \right)^m$

第二类斯特林数 · 行

S_n^m 表示把 n 个不同的元素分到 m 个相同的集合中（不能有空集）的方案数

把 m 个集合看成不同的，枚举几个集合没放，得到容斥的式子后 $/m!$

$$\begin{aligned} S_n^m &= \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^m C_m^i (-1)^{m-i} i! \\ &= \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i (m-i)!}{i!} = \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i}{i!} \frac{(m-i)!}{(m-i)!} \end{aligned}$$

可以让 $\sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i}{i!}$ 和 $\sum_{i=0}^m \frac{i!}{(m-i)!}$ 做卷积

第二类斯特林数 · 列

大概是采用了 Great_Influence 的做法

$S_m(x)$ 表示第 m 列斯特林数的生成函数 $S_m(x) = \sum_{i=0}^{\infty} S_{m,i} x^i$

$S_i^m = S_{i-1}^{m-1} + m S_{i-1}^m$ 可以得到 $S_m(x) = xS_{m-1}(x) + xmS_m(x)$

$S_m(x) = \frac{x}{1-mx} S_{m-1}(x) = \frac{x^m}{\prod_{i=1}^m (1-ix)}$

$\prod_{i=1}^m (1-ix)$ 可以分治FFT在 $O(n \log^2 n)$ 的复杂度内求出，也有 $O(n \log n)$ 的求法。

2020牛客寒假算法基础集训营4 二维跑步

向左有2种跑法，向右有3种跑法，也可以原地不动。

如果用 $F[i][j]$ 表示跑了 i 步，当前在位置 j 的方案数 $F[i][j] = 3F[i-1][j-1] + F[i-1][j] + 2F[i-1][j+1]$ 令生成函数 $F_i(x) = \sum F[i][j] x^j$ 那么有

$$F_n(x) = 3xF_{n-1}(x) + F_{n-1}(x) + \frac{2}{x} F_{n-1}(x) = (3x+1+\frac{2}{x})^n$$

为了更方便计算 $x^n F_n(x) = (3x^2+x+2)^n$ 对于右边，可以先求所有单位根 w 的 $(3w^2+w+2)^n$ 然后插值得到 $x^n F_n(x)$

复杂度 $O(n \log n)$ 标算用了更快的做法。

指数生成函数

POJ Blocks

用RBGY四种颜色涂满长度为 n 的序列，RG这两种颜色需要出现偶数次。

这是一个带标号组合问题，标号可以理解为颜色的位置。

考虑R涂满长度为0~n的序列的方案数为1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1...

那么R的指数生成函数 $\sum_{i \geq 0} \frac{x^{2i}}{2i!} = e^{x+e^{-x}}$ 考虑B涂满长度为0~n的序列的方案数为1, 1, 1, 1, 1...

那么R的指数生成函数 $\sum_{i \geq 0} \frac{x^i}{i!} = e^x$ 将四种颜色的生成函数乘起来 $F(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + 1)^2 = \frac{1}{4}(e^{4x} + 2e^{2x} + 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sum_{i \geq 0} \frac{4^i + 2^{i+1}}{i!} x^i$ \$n \geq 1\$时， $n! [x^n] F(x) = 4^{n-1} + 2^{n-1}$ 可以用快速幂求出。

或者 $f[i][j](0 \leq j \leq 3)$ 表示dp到第i个位置RG分别放了奇数次/偶数次的方案数，可以矩阵快速幂优化。

HUD 排列组合

有n种物品，并且知道每种物品的数量 a_i 要求从中选出m件物品的排列数。例如有两种物品A,B并且数量都是1，从中选2件物品，则排列有“AB”，“BA”两种 $(1 \leq m, n \leq 10)$

这是一个带标号组合问题，标号可以理解为某个物品的位置。

第i个物品的EGF $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!}$ 将n个物品的EGF乘起来得 $F(x)$ 则答案为 $m! [x^m] F(x)$

luoguP4841 [集训队作业2013]城市规划

题意

求n个点的简单有标号无向连通图数目模1004535809。

题解

设 $f(n)$ 为点数为 n 的无向连通图的数量 $g(n)$ 为点数为 n 的无向图的数量。

那么有

$$g(n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} f(i) g(n-i)$$

，可以看成枚举一号节点所在连通块大小。

$$代入 g(n) = 2^{\sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} f(i)}$$

$$2^{\sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} f(i)} = \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} f(i) 2^{\sum_{j=1}^{n-i} (-1)^{n-j} f(j)}$$

$$\frac{2^{\sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} f(i)}}{(n-1)!} = \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \frac{f(i)}{(i-1)!} \frac{2^{\sum_{j=1}^{n-i} (-1)^{n-j} f(j)}}{(n-i)!}$$

这是一个卷积，于是定义

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{(n-1)!} x^n$$

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} f(i)}}{n!} x^n$$

$$\$H(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} x^n$$

则

$$\$F = H * G^{(-1)} \quad (\text{mod } x^{n+1})$$

CF438E The Child and Binary Tree

题意

一棵树的权值为其点权和。点权在正整数集合 $\{c_1, \dots, c_n\}$ 中，求不同的有根二叉树的权值和模 998244353 。

题解

设 f_i 表示点权和为 i 的二叉树个数， g_i 表示权值 i 是否包含在 $\{c_1, \dots, c_n\}$ 中。
 f_i 可由枚举根的点权和左右子树得到

$$\$f_0 = 1$$

$$\$f_n = \sum_{i=1}^n g_i \sum_{j=1}^{n-i} f_j f_{n-i-j} \quad (n > 0)$$

令 F 表示 f 的生成函数， G 表示 g 的生成函数，那么

$$\$F = G * F^2 + 1$$

解得

$$\$F = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4G}}{2G}$$

讨论

$$\$ \text{取正号 } \lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \infty \quad (\text{舍去})$$

$$\$ \text{取负号 } \lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 1 \quad (\text{满足})$$

于是得

$$\$F = \frac{1 - \sqrt{1 - 4G}}{2G}$$

$$\$F = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4G}}$$

luoguP4451 [国家集训队]整数的lqp拆分

题意

F_n 表示斐波那契数列第 n 项。对给定 n 拆分指 $m > 0, a_1, a_2, \dots, a_m > 0$ ，且 $a_1 + a_2 + \dots + a_m = n$ 的有序集合，拆分的权值为 $F_{a_1} F_{a_2} \dots F_{a_m}$ 。求所有拆分权值之和模 1000000007 。

题解

斐波那契数列的生成函数为

$$\$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

拆分为 \$k\$ 个数，生成函数为 $F(x)^k$ 于是答案的生成函数为

$$\$G(x) = \sum_{i=0}^{\infty} F(x)^i$$

$$\$= \frac{1}{1-F(x)} = \frac{1-x-x^2}{1-2x-x^2}$$

分母 $\frac{1}{1-2x-x^2}$ 写成递推式

$$\$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$$

乘上分子

$$\$ans = a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = a_{n-1}$$

解递推特征方程，得

$$\$x_1 = -\sqrt{2} + 1, x_2 = \sqrt{2} + 1$$

设通项公式为

$$\$a_n = c_1(-\sqrt{2} + 1)^n + c_2(\sqrt{2} + 1)^n$$

代入 $n=0, n=1$ 解得

$$\$c_1 = \frac{-1}{2}, c_2 = \frac{1}{2}$$

$\sqrt{2}$ 在模 10^{9+7} 下有二次剩余 (59713600) ，所以最终答案

$$\$a_n \equiv 485071604 \times 940286408^n + 514928404 \times 59713601^n \pmod{10^{9+7}}$$

From:
<https://wiki.cvbbacm.com> - CVBB ACM Team

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:looking_up_at_the_starry_sky: 生成函数

Last update: 2020/06/12 18:56

