

# 工科数学分析 (2)

## 11 数项级数

### 11.1 数项级数的收敛性

### 11.2 正项级数的敛散性

#### 正项级数比较判别法 (很直观)

#### 柯西积分判别法

$x \geqslant 1, f(x) \geqslant 0, f(x)$  递减  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(x)$  与  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  同敛散

#### 正项级数柯西判别法 (与几何级数比较)

- $(\exists 0 < q < 1, N \in \mathbb{N}^+, \text{s.t. } n > N \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \leq q < 1) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛
- $(\forall N \in \mathbb{N}^+, \exists n > N, \text{s.t. } \sqrt[n]{a_n} \geq 1) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散
- $a_n \geq 0, (\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q) \vee (\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{a_n} = q)$  则
  - $q < 1 \Rightarrow$  敛
  - $q > 1 \Rightarrow$  散

#### 正项级数达朗贝尔判别法

- $a_n > 0, b_n > 0, \exists n_0, (n \geq n_0 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n})$  则  $\sum b_n$  敛  $\Rightarrow \sum a_n$  敛,  $\sum a_n$  散  $\Rightarrow \sum b_n$  散
- $a_n > 0$ 
  1.  $(\exists 0 < q < 1, n_0 \in \mathbb{N}^+, \text{s.t. } n \geq n_0 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1) \Rightarrow \sum a_n$  收敛
  2.  $(\exists n_0 \in \mathbb{N}^+, \text{s.t. } n \geq n_0 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1) \Rightarrow \sum a_n$  发散

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \Rightarrow \sum a_n$  发散

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ 
  1.  $q < 1 \Rightarrow \sum a_n$  敛
  2.  $q > 1 \Rightarrow \sum a_n$  散
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1 \Rightarrow \sum a_n$  敛
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1 \Rightarrow \sum a_n$  散

## 正项级数拉贝判别法

1.  $a_n > 0$ 
  - $\exists r > 1, N_0 \in \mathbb{N}^{\ast}$ , 当  $n > N_0$  时, 有  $n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \geq r > 1$ , 则  $\sum a_n$  敛
  - $\exists N_0 \in \mathbb{N}^{\ast}$ , 当  $n > N_0$  时, 有  $n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \leq 1$ , 则  $\sum a_n$  散
2.  $a_n > 0, \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) \quad (n \rightarrow \infty)$  或  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = l$  则
  - $l > 1 \Rightarrow \sum a_n$  敛
  - $l < 1 \Rightarrow \sum a_n$  散

## 11.3 一般级数收敛问题

### 莱布尼茨判别法

交错级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, a_n > 0$  若  $\{a_n\}$  递减趋于  $0$ , 则级数收敛。

### 分部求和公式

$\{a_n\}, \{b_n\}$  是实数列  $\forall n \in \mathbb{N}^{\ast}, S_k = \sum_{i=1}^k a_i, S_0 = 0$  则

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) + S_n b_n$$

(我觉得这就跟分部积分一模一样嘛)

$$\int S \mathrm{d}T = ST - \int T \mathrm{d}S$$

把  $a_n$  看成  $\mathrm{d}S$   $b_n$  看成  $T$   $\sum ab = \int T \mathrm{d}S = ST - \int S \mathrm{d}T = b \sum a + \sum (\sum a)(b_k - b_{k+1})$

### 阿贝尔引理

$\{b_n\}$  单调  $|\sum a_n| \leq M$  则  $|\sum_{k=1}^n a_k b_k| \leq M(|b_1| + 2|b_n|)$ .

## 狄利克雷判别法

$\{b_n\}$  单调递减趋  $0$   $\sum a_n$  有界  $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$  收敛.

## 阿贝尔判别法

$\{b_n\}$  单调有界  $\sum a_n$  收敛  $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$  收敛.

## 11.4 更序问题与级数乘法

### 更序问题

**Th. 11.4.1**

若级数绝对收敛，则其正项和与负项和均收敛；  
若其条件收敛，则两者均发散到无穷大。

**Th. 11.4.2**

若级数绝对收敛，则任意调整其中各项顺序得到的新级数也绝对收敛，且和不变。

**Th. 11.4.3**; **Riemann 更序定理**

若级数条件收敛，则可以通过调整其中的项的顺序使其收敛到任一确定实数。

### 级数乘法

**Def.**; **Cauchy 乘积**

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \dots + x_n y_1)$$

称为级数  $\sum x_n$  和  $\sum y_n$  的 Cauchy 乘积。

**Th. 11.4.3**; **Cauchy 定理**

两级数收敛，则其柯西积亦收敛，且收敛于两级数收敛值之积。

## 12 函数项级数

### 12.1 收敛性

## 逐点收敛

$\forall x_0 \in I$  若  $\{f_n(x_0)\}$  收敛到  $f(x_0)$  则称  $\{f_n(x)\}$  在  $I$  上逐点收敛.

## 一致收敛

$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) > 0$  当  $n > N(\epsilon)$  时,  $\forall x \in I$  有  $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$  成立, 则称函数序列  $\{f_n(x)\}$  在  $I$  上一致收敛于  $f(x)$  记为  $f_n(x) \xrightarrow{\text{uni}} f(x)$ .

## 12.2 一致收敛的判别

### 余项定理

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0 \iff f_n(x) \xrightarrow{\text{uni}} f(x) \iff (n \in \mathbb{N}^{\star})$

### 柯西收敛定理

$\forall x_0 \in I, \forall \epsilon > 0, \exists N(x_0, \epsilon) \in \mathbb{N}^{\star}, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}^{\star}: |f_n(x_0) - f_{n+p}(x_0)| < \epsilon \iff \{f_n(x)\}$  在  $I$  上逐点收敛.

$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}^{\star}, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}^{\star}, \forall x \in I: |f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \epsilon \iff \{f_n(x)\}$  在  $I$  上一致收敛.

### 维尔斯特拉斯(Weierstrass)判别法(M 判别法, 控制判别法)

若存在收敛的正项级数  $\sum a_n$  使得  $\forall x \in I$  都有  $|u_n(x)| \leq a_n$  则  $\sum u_n(x)$  在  $I$  上一致收敛.

### 狄利克雷判别法

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$

若在  $I$  上:

$\{b_n(x)\}$  对固定的  $x$  单调, 一致收敛至  $0$ .

$\sum_{n=1}^N a_n(x)$  在  $I$  上一致有界.

则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$  在  $I$  上一致收敛.

## 阿贝尔判别法

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$$

若在  $I$  上：

$b_n(x)$  对固定的  $x$  单调，在  $I$  上一致有界。

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  在  $I$  上一致收敛。

则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$  在  $I$  上一致收敛。

## 12.3 极限函数/和函数性质

### 连续性

$f_n(x)$  在  $I$  上连续  $f_n(x) \xrightarrow{\text{uni}} f(x)$  则  $f(x)$  在  $I$  上连续。

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $I$  上一致收敛于  $S(x)$  则  $u_n(x) \in C_{\{I\}} \xrightarrow{\text{uni}} S(x) \in C_{\{I\}}$

Dini 定理

$\{f_n(x)\} \in C[a,b]$  若对任意给定  $x \in [a, b]$   $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$   $f_n(x)$  递减，则  $\{f_n(x)\}$  一致收敛于  $0$ 。

$\{f_n(x)\} \in C[a,b]$  且收敛于  $f(x)$  若对任意给定  $x \in [a, b]$   $f_n(x)$  单调，则  $\{f_n(x)\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛于  $f(x)$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ,  $u_n(x) \in C[a,b]$ ,  $u_n(x) \geq 0$  若  $S(x) \in C[a,b]$  则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛。

### 积分

$\{f_n\} \in R[a,b]$   $f_n(x) \xrightarrow{\text{uni}} f(x)$  则  $f \in R[a, b]$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

(极限和积分交换顺序)

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{\text{uni}} S(x)$ ,  $u_n(x) \in R[a,b]$  则  $S(x) \in R[a,b]$ ,  $\int_a^b (\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx$

### 求导

$f_n \in C[a,b]$ ,  $f_n \xrightarrow{\text{uni}} g(x)$ ,  $\exists x_0 \in [a, b]$ ,  $\{f_n(x_0)\}$  收敛  $\xrightarrow{\text{uni}} f(x)$  在  $[a,b]$  上一致收敛于  $f(x)$  且对  $\forall x \in [a,b]$ ,  $f_n'(x) = g(x)$  即  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x)$

$\{u_n\} \in C[a, b]$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  收敛  $\Rightarrow$   $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛于  $f(x)$  且  $S(x) \in C[a, b]$ ,  $S(x) = g(x)$  即  $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$

## 12.4 幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

### 收敛性

Abel 定理

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

若在  $x_0 \neq 0$  处收敛，则对所有  $|x| < |x_0|$  绝对收敛。

若在  $x_1 \neq 0$  处发散，则对所有  $|x| > |x_1|$  发散。

### 收敛半径

$$R \in [0, +\infty)$$

### 收敛半径公式

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

### 代数性质

$\sum a_n x^n: R_a, \sum b_n x^n: R_b, R = \min\{R_a, R_b\}$  则：

$\sum (a_n \pm b_n) x^n = \sum a_n x^n \pm \sum b_n x^n$  在  $(-R, R)$  上成立。

$\sum a_n x^n, \sum b_n x^n$  的柯西积在  $(-R, R)$  上绝对收敛。

### 内闭一致收敛性

$\forall [L, K] \subset (-R, R)$   $\sum a_n x^n$  在  $[L, K]$  上一致收敛。

## 分析性质

### Abel 第二定理

$\lim_{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$  (收敛时)

$\lim_{x \rightarrow (-R)^+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$  (收敛时)

### 导数性质

$S(x) = \sum a_n x^n: R, \quad S(x) \in C(-R, R)$   $\Rightarrow S(x)$  在  $(-R, R)$  上有任意阶导数, 则

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k} = \sum_{n=k}^{\infty} n^{\underline{k}} a_n x^{n-k}$$

收敛域可能改变 (端点处)

### 积分性质 (???)

$S(x) \in R(-r, r)$  且可逐项积分, 即对  $\forall x \in (-R, R)$  有

$$\int_0^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

端点性质可能改变

### 展开

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n, \quad x \in (x_0-R, x_0+R)$$

$f$  的泰勒级数收敛于  $f \iff \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \forall x \in U(x_0, R)$

$f$  的泰勒级数收敛于  $f \iff \forall M, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in U(x_0, R)$  即  $\{f^{(n)}(x)\}$  在  $(x_0-R, x_0+R)$  一致有界

### 例

这个例 8 有点生成函数的味道?

$$f(x) = \frac{1}{1-2x^2} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1-2x} \right) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$

## 应用

求和、求导、求积

用各种基本式子去凑..

看起来好难啊

---

# 13 Fourier 级数

$$y = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

## 13.1 周期函数的 Fourier 级数

“一切周期函数都可展成三角函数的无穷级数”

### 三角级数

$$y = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

### 三角函数系及其正交性

#### 三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

#### 正交

任两个不同函数的乘积在  $[-\pi, \pi]$  上的积分为 0.

(积化和差 和差化积)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \pi \delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

### 傅里叶级数

## 傅里叶系数

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} [\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)] \mathrm{d}x = a_0 \pi \iff a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \mathrm{d}x + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx \mathrm{d}x) = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \mathrm{d}x = a_n \pi \iff a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x$$

$$\text{同理 } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x$$

## 傅里叶级数

若  $f$  是以  $2\pi$  为周期的可积或绝对可积函数, 那么  $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ .

## 分段可微

$f$  定义在  $[a, b]$  上, 若存在  $[a, b]$  的一个分割, 使得  $f$  在分割出的区间对应的开区间中分别可微, 则称  $f$  在  $[a, b]$  上是分段可微的。

## Fourier 收敛条件

若  $f$  以  $2\pi$  为周期, 在  $[-\pi, \pi]$  上分段可微, 那么  $f$  的 Fourier 级数在  $\forall x_0$  处收敛于  $\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$ .

推论  $f$  在  $[-\pi, \pi]$  有一阶导数  $\Rightarrow f$  可展成 Fourier 级数。

## 正弦级数与余弦级数

定义在  $[-\pi, \pi]$  上时

**Th.**

(1) 当周期为  $2\pi$  的奇函数  $f(x)$  展开成傅里叶级数时, 其系数为

$$\begin{cases} a_n = 0, & (n = 0, 1, 2, \dots) \\ b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x, & (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

(2) 当周期为  $2\pi$  的偶函数  $f(x)$  展开成傅里叶级数时, 其系数为

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x, & (n = 0, 1, 2, \dots) \\ b_n = 0, & (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

**Def.**

若  $f(x)$  为奇函数，其傅里叶级数称为正弦级数。  
若  $f(x)$  为偶函数，其傅里叶级数称为余弦级数。

定义在  $[0, \pi]$  上时

将其延拓。

奇延拓  $g(x) = -f(-x)$

偶延拓  $g(x) = f(-x)$

## 周期为 $2L$ 的傅里叶级数

变量置换  $\frac{\pi x}{L} = t$

$F(t) = f(\frac{Lt}{\pi})$

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L})$

## 13.2 Fourier 级数的逐点收敛

### Dirichlet 积分

$f$  是以  $2\pi$  为周期的可积或绝对可积函数。

记  $S_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0)$

$$S_n(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos kx \cos kx_0 + \sin kx \sin kx_0) \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(x-x_0) \right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left( \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-x_0)}{2\sin\frac{x-x_0}{2}} \right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x_0) \left( \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} \right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(t+x_0) + f(x_0-t)) \left( \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} \right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(t+x_0) + f(x_0-t)) \left( \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} \right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(t+x_0) + f(x_0-t)) \left( \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} \right) \mathrm{d}x$$

狄利克雷积分、狄利克雷积分核

### Riemann-Lebesgue 引理

$\mathbf{Th. 13.1}$  (R-L 引理)

若  $f$  在  $[a, b]$  上可积或绝对可积，那么：

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x \, dx = 0$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx = 0$$

**Th. 13.2**

若  $f$  在  $[-\pi, \pi]$  上可导， $f'$  在  $[-\pi, \pi]$  上可积或绝对可积，如果  $f(-\pi) = f(\pi)$  那么：

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty$$

**Th. 13.3**

若  $f$  在  $[-\pi, \pi]$  上有  $k+1$  阶导数， $f^{(k+1)}$  在  $[-\pi, \pi]$  上可积或绝对可积，如果  $f(-\pi) = f(\pi)$ ,  $f'(-\pi) = f'(\pi)$ , ...,  $f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi)$  那么：

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), \quad n \rightarrow \infty$$

## 收敛定理

由 R-L 引理 Dirichlet 积分收敛。

## 傅里叶级数的局部化定理

$f$  是以  $2\pi$  为周期的可积或绝对可积函数，那么  $f$  的傅里叶级数在点  $x_0$  是否收敛以及收敛到何数值，仅与  $f$  在  $x_0$  附近的取值有关。

## Dini 判别法

**Th. 13.5**

若  $f$  以  $2\pi$  为周期，且在  $[-\pi, \pi]$  上可积或绝对可积，对  $s \in \mathbb{R}$  令：

$$\varphi(t) = f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2s,$$

若  $\exists \delta > 0$ ,  $\text{s.t.} \int_0^\delta \frac{\varphi(t)}{t} dt$  在  $[0, \delta]$  上可积或绝对可积，那么  $f$  的 Fourier 级数在  $x_0$  处收敛于  $s$

**Th. 13.7**

若  $f$  以  $2\pi$  为周期，且在  $[-\pi, \pi]$  上可积或绝对可积，若  $f$  在  $x_0$  处存在导数，或者有两个有限的单侧导数，那么其傅里叶级数在  $x_0$  处收敛于  $f(x_0)$ 。

**Def. 13.2**

若  $f$  在  $U^o(x_0)$  内有定义，若存在  $\delta > 0, L > 0, \alpha > 0$  使得当  $t \in (0, \delta)$  时有

$$|f(x_0+t) - f(x_0)| \leq L t^\alpha,$$

$$|f(x_0-t) - f(x_0)| \leq L t^\alpha,$$

则称  $f$  在  $U^o(x_0)$  内满足  $\alpha$  阶 Lipschitz 条件。

$\mathbf{Th. 13.6}$

若  $f$  以  $2\pi$  为周期，且在  $[-\pi, \pi]$  上可积或绝对可积，且  $f$  在  $U^o(x_0)$  内满足  $\alpha$  阶 Lipschitz 条件，那么  $f$  的傅里叶级数在  $x_0$  处收敛。

## 14 多元函数的极限与连续

### 14.1 Euclid 空间的点集及基本概念

#### n 维向量空间

集合  $\mathbb{R}^n$  定义了加法，数乘

#### Euclid 空间

##### 定义

在向量空间  $\mathbb{R}^n$  上定义了内积的空间。

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

1. 半正定性  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$
2. 对称性  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$
3. 线性性  $\langle \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \mu \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$

#### Cauchy-Schwartz 不等式

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$$

#### 范数

##### 定义

$\mathbf{Def. 14.1.1}$

$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$  称向量  $\boldsymbol{x}$  的范数。

1. 正定性  $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$
2. 保数乘  $\|\lambda \boldsymbol{x}\| = |\lambda| \|\boldsymbol{x}\|$
3. 三角不等式  $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$

推论

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \leq \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\|$$

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 \leq (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2$$

夹角

$$\cos \theta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle}{\|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\|}$$

距离

$\mathbb{R}^2$  上定义  $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$  之间距离为  $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$

开球

$\mathbf{Def. 14.1.2}$

开球  $B_r(\boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < r\}$

点列收敛

$\mathbf{Def. 14.1.3}$

$\{\boldsymbol{x}_k\} \subset \mathbb{R}^n$

$\exists \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}^*, \forall k > K, \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon$  则称点列

$\{\boldsymbol{x}_k\}$  收敛于  $\boldsymbol{a}$  记为

$\lim_{k \rightarrow \infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}$  称  $\boldsymbol{a}$  为点列的极限。

若对每一分量都有  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{i,k} = a_i$  称点列  $\{\boldsymbol{x}_k\}$  按分量收敛于  $\boldsymbol{a}$

$\mathbf{Th. 14.1.1}$

点列收敛于  $\boldsymbol{a}$  iff 点列按分量收敛于  $\boldsymbol{a}$ 。

## 柯西收敛定理

$\mathbf{Def. \ 14.1.4}$   $\text{\quad \text{基本列}}$

基本一样，不记了

$\mathbf{Th. \ 14.1.2}$   $\text{\quad \text{柯西收敛定理}}$

点列收敛  $\iff$  点列是基本列

## 开集与闭集

$\mathbf{Def. \ 14.1.5}$   $\text{\quad \text{开集}}$

$E \subset \mathbb{R}^n$  若  $\forall x \in E, \exists \epsilon > 0, \text{s.t. } B_\epsilon(x) \subset E$  则称  $E$  为开集。

若一个集合的补集是开集，则该集合是闭集。

约定  $\mathbb{R}^n$  和  $\emptyset$  既是开集也是闭集。

$\mathbf{Prop. \ 14.1.1}$

有限多个开集的交仍是开集，任意多个开集的并仍是开集。

有限多个闭集的并仍是并集，任意多个闭集的交还是闭集。

## 内点、外点、边界点

$\mathbf{Def. \ 14.1.6}$

设  $E \subset \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$ ,

- $\exists B_\epsilon(x) \subset E \iff x$  为  $E$  的内点
- $\exists B_\epsilon(x) \subset E^c \iff x$  为  $E$  的外点
- $\forall B_\epsilon(x), \exists p, q \in B_\epsilon(x), \text{s.t. } p \in E, q \notin E \iff x$  为  $E$  的边界点

内点的全体称为  $E$  的内部，记为  $E^\circ$

边界点构成的集合称  $E$  的边界，记为  $\partial E$

## 聚点

$\mathbf{Def. \ 14.1.7}$   $\text{\quad \text{聚点}}$

$a$  为聚点  $\iff E \subset \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^n, \forall$

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  使得  $(B_\delta(a) \cap E) \setminus B_\epsilon(a) \neq \emptyset$

$a$  为孤立点  $\iff \exists \delta > 0$  使得  $B_\delta(a) \cap E \setminus \{a\} = \emptyset$

## 导集、闭包

**Def. 14.1.8**

聚点全体称为导集，记为  $E'$

$\bar{E} = E \cup E'$  称为  $E$  的闭包。

**Th. 14.1.3**

集合  $E$  是闭集  $\iff E' \subset E$

**Th. 14.1.4**

集合  $E$  是闭集  $\iff \forall \{a_n\} \subset E, (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in E \text{ 收敛时})$

**Th. 14.1.5**

集合  $E$  的导集与闭包均为闭集。

## 连续曲线、道路连通

**Def. 14.1.9**

设  $E$  是  $\mathbb{R}^n$  中的点集，若任给  $p, q \in E$  存在  $E$  中的连续曲线将两者联结，称  $E$  是道路连通的。

连续映射  $\varphi = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

若所有的  $\varphi_i(t)$  都连续，那么称  $\varphi$  是一个连续映射，它的像为一条连续曲线。

**Def. 14.1.10**

$\mathbb{R}^n$  中道路连通的开集称为（开）区域，区域的闭包称为闭区域。

## 14.2 Euclid 空间的基本定理

### 闭集套定理

**Th. 14.2.1** (闭集套定理)

设  $\{E_k\}$  是  $\mathbb{R}^n$  上的非空闭集序列，满足  $E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_k \supset E_{k+1} \supset \dots$  且  $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam } E_k = 0$  则  $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$  中只有唯一的一点。

$\text{diam} E = \sup\{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E\}$  称  $E$  的直径。

## 列紧性定理 **Bolzano-Weierstrass**

$\text{Th. 14.2.2}$  (列紧性定理)

$\mathbb{R}^n$  上有界点列  $\{x_k\}$  必有收敛子列。

## 紧致集

$\text{Def. 14.2.1}$  (紧致集)

设  $S$  为  $\mathbb{R}^n$  上点集，若  $\mathbb{R}^n$  中一组开集  $\{U_\alpha\}$  满足  $\cup_\alpha U_\alpha \supset S$  那么称  $\{U_\alpha\}$  为  $S$  的一个开覆盖。

若  $S$  的任意一个开覆盖  $\{U_\alpha\}$  中总存在一个有限子覆盖覆盖  $S$  则称  $S$  为紧致集。

## 有限覆盖定理

$\text{Th. 14.2.3}$  (有限覆盖定理)

设  $E$  为  $\mathbb{R}^n$  中子集，则以下几条等价：

- $E$  为紧致集。
- $E$  中任何无穷点列均有收敛子列，且该子列极限仍在  $E$  中。
- $E$  为有界闭集。

## 14.3 多元函数的极限与连续

### 定义

$\text{Def. 14.3.1}$  (多元函数)

$\mathbb{R}^n$  的子集到  $\mathbb{R}$  的映射  $f$  称为  $n$  元函数，其中该子集是  $f$  的定义域  $\{x \mid x \in \mathbb{R}^n\}$  是  $f$  的值域。

$z=f(x)$  或  $z=f(x_1, \dots, x_n)$

二元函数一般记作  $z=f(x,y)$

$\text{Def. 14.3.2}$  (重极限)

$D \subset \mathbb{R}^n$   $z=f(x)$  是定义在  $D$  上的  $n$  元函数  $a \in \mathbb{R}^n$  是  $D$  的一个聚点  $A$  是一个实数。

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in B_\delta(a), |f(x) - A| < \epsilon$

称  $A$  为  $f(x)$  在  $a$  点的重极限。

### 海涅定理 Heine-Borel

**Th. 14.3.1** (海涅定理)

$D \subset \mathbb{R}^n, z = f(x)$  是定义在  $D$  上的  $n$  元函数，则

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \iff \forall \{x_k\} \subset D, x_k \neq a, x_k \rightarrow a, \forall k \rightarrow \infty$  都有  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = A$

### 累次极限

**Def. 14.3.3** (累次极限)

$D \subset \mathbb{R}^n, z = f(x)$  是定义在  $D$  上的二元函数，给定点  $(x_0, y_0)$ 。若对于每个固定的  $y \neq y_0$  极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$  存在，若极限  $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$  也存在，则称此极限为函数  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  先对  $x$  后对  $y$  的累次极限。

**Th. 14.3.2**

二元函数  $f(x, y)$  在某点的重极限与两个累次极限均存在，则它们相等。

### 连续

**Def. 14.3.3** (累次极限)

$D \subset \mathbb{R}^n, z = f(x)$  是定义在  $D$  上的  $n$  元函数，给定点  $a \in D$ 。若  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  则称函数  $f(x)$  在  $a$  点连续。

我们约定  $f$  在  $D$  的孤立点也连续。

不连续的点称为间断点。

在定义域上每一点均连续，则称  $f$  在定义域上连续，或称  $f$  是定义域上的连续函数。

**Example. 14.3.7**

行列式函数  $\det: M_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  是连续函数。（将  $M_{n \times n}$  视为  $\mathbb{R}^{n^2}$ ）

$\mathbf{Example. \ 14.3.8}$  text

$n$  元多项式都是连续函数。

设  $P, Q$  为  $n$  元多项式

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x)Q(x) = P(a)Q(a),$$
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}, \quad (Q(a) \neq 0)$$

## 14.4 多元函数连续的性质

### 一致连续

$\mathbf{Def. \ 14.4.1}$  text (一致连续)

$D \subset \mathbb{R}^n, z = f(x)$  是定义在  $D$  上的  $n$  元函数，如果  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in D, \|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$  则称函数  $f$  在  $D$  上一致连续。

### 连续映射

$\mathbf{Def. \ 14.4.2}$  text

$D \subset \mathbb{R}^n, f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$  是  $D$  到  $\mathbb{R}^m$  的映射，给定  $x_0 \in D$  如果  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$  则称映射  $f$  在点  $x_0$  连续。

连续映射类似定义。

可表示为：

$$\| \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \| = \| \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \|$$

### 性质

$\mathbf{Th. \ 14.4.1}$  text

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  是连续映射  $\iff \forall f_i, f_i$  是连续函数。

$\mathbf{Th. \ 14.4.2}$

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  以下条件等价。

1.  $f$  是连续映射
2. 对  $\mathbb{R}^n$  上任意收敛点列  $x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$  均有  $f(x_n) \rightarrow f(x_0) (n \rightarrow \infty)$
3. 对任意开集  $E \subset \mathbb{R}^m$   $f^{-1}(E)$  是  $\mathbb{R}^n$  中开集

$\mathbf{Th. 14.4.3}$

连续映射将紧致集映射成紧致集。

$\mathbf{Th. 14.4.4}$

$D$  为  $\mathbb{R}^n$  中紧致集  $f$  是  $D$  上的连续函数，则下列结论成立

1. (有界性)  $f$  在  $D$  上有界。
2. (最值性)  $f$  在  $D$  上可以存在最大值和最小值。
3.  $f$  在  $D$  上一致连续。

$\mathbf{Th. 14.4.6}$

连续映射把道路连通集映射为道路连通集。

推论

(1) 连续函数将道路连通的紧致集映射成区间。(2) 连续函数将闭区域映射成闭区间。

$\mathbf{Th. 14.4.7}$

$D$  为  $\mathbb{R}^n$  中紧致集  $f$  是  $D$  上的连续函数，则  $\forall y \in \mathbb{R}^m, (\exists x_1, x_2 \in D, y \in [f(x_1), f(x_2)] \Rightarrow \exists x \in D, \text{s.t. } y = f(x))$

## 15 多元函数微分学

### 15.1 全微分与偏导数

#### 全微分

设开集  $D \subset \mathbb{R}^n, f: D \rightarrow \mathbb{R}$  对  $D$  中给定的点  $x_0$  对于  $D$  中  $x_0$  附近的点  $x$  如果

$$f(x) - f(x_0) = \lambda_1 \Delta x_1 + \lambda_2 \Delta x_2 + \cdots + \lambda_n \Delta x_n + o(\|\Delta x\|)$$

其中  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  是常数  $\Delta x = (x_1 - x_{01}, \dots, x_n - x_{0n})$

此时称函数  $f$  在  $x_0$  处可微。

线性主要部分称  $f$  在  $\mathbf{x}_0$  处的全微分，有时也简称为微分。

## 偏导

$\mathbf{Def. 15.1.2}$

设开集  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  对  $D$  中给定的点  $\mathbf{x}_0 = (x_1, \dots, x_n)$  极限

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i}$$

存在，则称  $f$  在  $\mathbf{x}_0$  处关于第  $i$  个分量可偏导，称该极限为函数  $f$  在  $\mathbf{x}_0$  处关于  $x_i$  的偏导数，记为  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)$  或  $f_{x_i}(\mathbf{x}_0)$

$$\mathrm{d}f(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0) \mathrm{d}x_k$$

处处存在偏导：偏导函数

## 梯度

设开集  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  对于  $D$  中给定的点  $\mathbf{x}_0 = (x_1, \dots, x_n)$  如果函数  $f$  在  $\mathbf{x}_0$  处关于每个分量都可偏导，则称向量

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \right)$$
 为  $f$  在  $\mathbf{x}_0$  的梯度，记为  $\mathrm{grad} f(\mathbf{x}_0)$

## 方向导数

$\mathbf{u}$  为给定的方向  $\mathbf{x}_0 \in D$  极限  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}$  称为  $f$  在  $\mathbf{x}_0$  处沿方向  $\mathbf{u}$  的方向导数，记作  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0)$ 。

## 二元函数偏导

设  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的某一邻域内有定义，若  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$  存在，称此极限为函数  $z = f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  处对  $x$  的偏导数。

对  $y$  类似定义。

偏导函数类似定义。

几何意义：

对  $x$  偏导是曲面被平面  $y=y_0$  截线在  $M_0$  处的切线  $M_{0T_x}$  对  $x$  轴的斜率。

对  $y$  类似。

## 二元函数全微分

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y} \mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z} \mathrm{d}z$$

## 可微条件

多元函数各偏导存在  $\not\rightarrow$  全微分存在

### 必要条件

在某点可微  $\rightarrow$  在该点各偏导存在，且全微分  $\mathrm{d}f = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i$

### 充分条件

如果函数  $z=f(x, y)$  的偏导数  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$  在点  $(x_0, y_0)$  的某邻域内存在，且均在该点连续，则该函数在该点可微。

## 各条件关系

各偏导连续  $\rightarrow$  函数可微

函数可微  $\rightarrow$  函数连续

函数可微  $\rightarrow$  函数偏导存在

反例：

1.  $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$  上半圆锥
2.  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$
3.  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$f$  在点  $\boldsymbol{x}_0=(x_1, \dots, x_n)$  可微  $\rightarrow$  则  $f$  在  $\boldsymbol{x}_0$  处沿任意方向  $\boldsymbol{u}$  的方向导数均存在，且

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = f_{x_1}(\mathbf{x}_0)u_1 + \dots + f_{x_n}(\mathbf{x}_0)u_n$$

这里  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  是指向方向  $\mathbf{u}$  的单位向量。

## 15.2 多变量函数的求导

### 链式法则

#### 多元函数套一元函数

$u = \phi(t), v = \psi(t)$  都在  $t$  可导，函数  $z = f(u, v)$  在对应点  $(u, v)$  可微，则复合函数  $z = f(\phi(t), \psi(t))$  在对应点  $t$  可导，其导数可用下列公式计算：

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt}$$

#### 多元函数套多元函数

$u = \phi(x, y), v = \psi(x, y)$  都在  $(x, y)$  可微，函数  $z = f(u, v)$  在对应点  $(u, v)$  可微，则复合函数  $z = f(\phi(x, y), \psi(x, y))$  在对应点  $(x, y)$  可微，其导数可用下列公式计算：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

函数  $f(u_1, \dots, u_m)$  在对应点  $(u_1, \dots, u_m)$  可微， $u_k(x_1, \dots, x_n), k=1, 2, \dots, m$  在  $(x_1, \dots, x_n)$  可微：

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n.$$

### 特殊例子

$$z = f(u, x, y), u = \phi(x, y)$$

$$z = f(\phi(x, y), x, y)$$

$$\text{令 } v = x, w = y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 1, \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}$$

注意区别  $\frac{\partial z}{\partial x}$  与  $\frac{\partial f}{\partial x}$ 。

## 向量值函数的微分 □ Jacobian 矩阵

$\mathbf{Def. 15.2.1}$

设向量值函数  $\mathbf{f}: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  点  $\mathbf{x}_0 = (x_1, \dots, x_n) \in D$  若存在  $m \times n$  阶矩阵  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  使得

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = A \Delta \mathbf{x} + o(\|\Delta \mathbf{x}\|)$$

$$\lim_{\|\Delta \mathbf{x}\| \rightarrow 0} \frac{\|o(\|\Delta \mathbf{x}\|)\|}{\|\Delta \mathbf{x}\|} = 0$$

则称  $\mathbf{f}$  在  $\mathbf{x}_0$  处可微，并称  $A \Delta \mathbf{x}$  为  $\mathbf{f}$  在  $\mathbf{x}_0$  处的微分，记作

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = A \Delta \mathbf{x}.$$

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \Delta \mathbf{x}$$

称为向量值函数  $\mathbf{f}$  在点  $\mathbf{x}_0$  的 Jacobian 矩阵。

映射微分中的  $m \times n$  阶矩阵就是其 Jacobian 矩阵，因此

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) d\mathbf{x}$$

## 复合映射的微分

设开集  $E \subset \mathbb{R}^l$ ,  $D \subset \mathbb{R}^m$  映射  $\mathbf{g}: E \rightarrow D$ ,  $\mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  记复合映射为  $\mathbf{h} = \mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ :  $E \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

如果  $\mathbf{g}$  在  $\mathbf{u}_0 \in E$  处可微， $\mathbf{f}$  在  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{g}(\mathbf{u}_0) \in D$  处可微，则复合映射  $\mathbf{h}$  在  $\mathbf{u}_0$  处可微，且有

$$d\mathbf{h}(\mathbf{u}_0) = d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) d\mathbf{g}(\mathbf{u}_0)$$

## 全微分形式不变性（一阶）

$$z=f(u, v)$$

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v$$

$u, v$  可为自变量或中间变量。

## 15.3 多元函数泰勒公式

### 高阶偏导

$z=f(x, y)$  的二阶偏导为

（纯偏导）

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x, y)$$

（混合偏导）

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x, y)$$

### 混合偏导相等条件

若函数  $z=f(x, y)$  的两个二阶混合偏导数  $f_{xy}, f_{yx}$  在区域  $D$  内连续，那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等。

### 凸区域

设  $D \subset \mathbb{R}^n$  是区域。若联结  $D$  中任意两点的线段都完全属于  $D$  即对于任意两点  $x_0, x_1 \in D, \forall \lambda \in [0, 1]$  有  $x_0 + \lambda(x_1 - x_0) \in D$  则称  $D$  为凸区域。

### 中值定理

二元函数  $f(x, y)$  在凸区域  $D$  上可微，则

对于  $D$  内任意两点  $(x_0, y_0)$  和  $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$  至少存在一个  $\theta \in (0, 1)$

使得

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \Delta x + f_y(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \Delta y$$

多元 :

设  $D \subset \mathbb{R}^n$  是凸区域  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  可微, 任给  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in D$  存在  $\xi \in D$  使得 :

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = Jf(\xi)(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = Jf(\xi) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}), \theta \in (0, 1)$$

### 泰勒公式

#### 二元函数

$\mathbf{Th. 15.3.2}$

设函数  $f(x, y)$  在点  $(x_0, y_0)$  的邻域  $U$  上具有  $k+1$  阶连续偏导数, 那么对于  $U$  内每一点  $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$  都有

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + (\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}) f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} (\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0, y_0) + \dots + \frac{1}{k!} (\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y})^k f(x_0, y_0) + R_k$$

$$R_k = \frac{1}{(k+1)!} (\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y})^{k+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y), \theta \in (0, 1)$$
 称为 Lagrange 余项。

$$(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y})^p = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} (\Delta x)^i (\Delta y)^{p-i} \frac{\partial^p f}{\partial x^i \partial y^{p-i}}(x_0, y_0)$$

我觉得这东西其实就是一个算子 ...  
 只不过这东西要根据 Leibniz 公式来计算  
 好像说了些废话 ..

#### 多元函数

$\mathbf{Th. 15.3.3}$

设函数  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  在点  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  附近具有  $k+1$  阶连续偏导数, 那么该点附近有

$$f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + (\sum_{i=1}^n \Delta x_i \frac{\partial}{\partial x_i}) f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + \dots + \frac{1}{k!} (\sum_{i=1}^n \Delta x_i \frac{\partial}{\partial x_i})^k f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + R_k$$

$$f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + R_k$$

$$R_k = \frac{1}{(k+1)!} \left( \sum_{i=1}^n \Delta x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{k+1} f(x_1^0 + \theta \Delta x_1, x_2^0 + \theta \Delta x_2, \dots, x_n^0 + \theta \Delta x_n), \quad \theta \in (0, 1)$$

称 Lagrange 余项。

### 多重指标及指标记号的泰勒公式

称  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  为一个多重指标，记  $|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ， $\boldsymbol{\alpha}! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$

对  $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$  记  $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$

则  $(x_1 + \dots + x_n)^k = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=k} \frac{k!}{\boldsymbol{\alpha}!} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$

使用多重指标  $\boldsymbol{\alpha}$  的高阶偏导数

$$\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{\alpha}} f(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} f(\boldsymbol{x})$$

$\mathbf{Th. 15.3.4}$

$D \subset \mathbb{R}^n$  是凸区域， $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  具有  $m+1$  阶连续偏导数，存在  $\theta \in (0, 1)$  使得

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \boldsymbol{D}^{\boldsymbol{\alpha}} f(\boldsymbol{x}_0) \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{x}_0^{\boldsymbol{\alpha}} + R_m$$

$$R_m = \frac{1}{(m+1)!} \boldsymbol{D}^{\boldsymbol{\alpha}} f(\boldsymbol{x}_0 + \theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)) \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{x}_0^{\boldsymbol{\alpha}}$$

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{J}f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \frac{1}{2} (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$$

其中二次项矩阵一般记作  $\text{Hess}(f) = \left( \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{a})}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{n \times n}$  称为  $f$  在  $\boldsymbol{a}$  处的 Hessian 矩阵。

## 15.4 隐函数定理

### 隐函数存在唯一性定理

若函数  $F(x, y)$  满足下列条件：

1. 函数  $F$  在以  $P_0(x_0, y_0)$  为内点的某一区域  $D \subset \mathbb{R}^2$  上连续
2.  $F(x_0, y_0) = 0$
3. 在  $D$  内存在连续的偏导数  $F_y(x, y)$
4.  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$

则在  $P_0$  的某邻域  $U(P_0) \subset D$  内，方程  $F(x, y) = 0$  唯一确定了一个定义在某区间  $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$  内的函数  $y = f(x)$  使得

1.  $f(x_0) = y_0$ ,  $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$  时  $(x, f(x)) \in U(P_0)$  且  $F(x, f(x)) \equiv 0$
2.  $f(x)$  在  $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$  内连续。

### 隐函数可微性定理

若函数  $F(x, y)$  满足隐函数存在唯一性定理的 4 个条件，再加上  $F_x(x, y)$  在  $D$  内存在且连续，则由方程  $F(x, y) = 0$  所确定的隐函数  $y = f(x)$  在  $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$  内有连续的导函数，且  $f'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$

### 二元隐函数唯一存在与连续可微性定理

若函数  $F(x, y)$  满足下列条件：

1. 函数  $F$  在以  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  为内点的某一区域  $D \subset \mathbb{R}^3$  上连续
2.  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$
3. 在  $D$  内存在连续的偏导数  $F_x, F_y, F_z$
4.  $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

则在  $P_0$  的某邻域  $U(P_0) \subset D$  内，方程  $F(x, y, z) = 0$  唯一确定了一个定义在某区间  $U((x_0, y_0)) \subset \mathbb{R}^2$  内的连续函数  $z = f(x, y)$  使得

1.  $f(x_0, y_0) = z_0$ ,  $(x, y) \in U((x_0, y_0))$  时  $(x, y, f(x, y)) \in U(P_0)$  且  $F(x, y, f(x, y)) \equiv 0$
2.  $z = f(x, y)$  在  $U((x_0, y_0))$  有连续的偏导数，且  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x} / \frac{\partial F}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y} / \frac{\partial F}{\partial z}$

### 隐函数组定理

定义  $\frac{\partial (F, G)}{\partial (u, v)} = \begin{pmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{pmatrix} \neq 0$

若：

1. 函数  $F(x, y, u, v), G(x, y, u, v)$  在以  $P_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$  为内点的某一区域  $V \subset \mathbb{R}^4$  上连续

2.  $F(x_0, y_0, u_0, v_0) = G(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$
3. 在  $V$  内  $F, G$  存在一阶连续偏导数
4.  $\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} \right|_{P_0} \neq 0$

则在  $P_0$  的某邻域  $U(P_0) \subset V$  内，方程  $F(x, y, u, v) = G(x, y, u, v) = 0$  唯一确定了一个定义在某区间  $U((x_0, y_0)) \subset \mathbb{R}^2$  内的两个隐函数  $u=f(x, y), v=g(x, y)$  使得

1.  $f(x_0, y_0) = u_0, g(x_0, y_0) = v_0$  且当  $(x, y) \in U((x_0, y_0))$  时  $(x, y, f(x, y), g(x, y)) \in U(P_0)$  且  $F(x, y, f(x, y), g(x, y)) \equiv 0 \equiv G(x, y, f(x, y), g(x, y))$
2.  $u=f(x, y), v=g(x, y)$  在  $U((x_0, y_0))$  内连续。
3.  $u, v$  在  $U((x_0, y_0))$  内有一阶连续偏导，且

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)}$$

## 15.5 隐函数定理的几何应用

### 平面曲线的切线与法线

$$F(x, y) = 0$$

$$\text{切线} \quad y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\text{法线} \quad y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

$$\text{切线} \quad F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

$$\text{法线} \quad F_y(x_0, y_0)(x - x_0) - F_x(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

### 空间曲线的切线与法平面

$$\text{切线} \quad \frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}$$

$$\text{法平面} \quad x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$$

切线：

$$\frac{x - x_0}{\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \right|_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} \right|_{M_0}} = \frac{z - z_0}{\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \right|_{M_0}}$$

法平面：

$$(x - x_0) \left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \right|_{M_0} + (y - y_0) \left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} \right|_{M_0} + (z - z_0) \left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \right|_{M_0} = 0$$

$$G)\left\{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}\right\}\bigg|_{M_0}+(z-z_0)\left\{\frac{\partial(F, G)}{\partial(z)}\right\}\bigg|_{M_0}=0$$

## 曲面的切平面与法线

$$F(x, y, z)=0$$

切平面：

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)+F_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)+F_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0)=0$$

法线：

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

## 15.6 多元函数的极值问题

### 矩阵的正定性

定义

$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$  都有

$\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x} > 0$  则称  $A$  为正定矩阵。

$\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x} \geq 0$  则称  $A$  为半正定矩阵。

$\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x} < 0$  则称  $A$  为负定矩阵。

$\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x} \leq 0$  则称  $A$  为半负定矩阵。

否则属于不定矩阵。

判定

$A$  正定  $\iff$  所有顺序主子式大于 0

$A$  正定  $\iff$  所有特征值大于 0

$A$  不定  $\iff a_{11}a_{22}-a_{12}^2 < 0$ .

### 二元函数的 Hessian 矩阵

函数  $f(x, y)$  在  $P_0$  的邻域内有一二阶连续偏导，记  $A=f_{xx}(x_0, y_0)$ ,  $B=f_{xy}(x_0, y_0)$ ,  $C=f_{yy}(x_0, y_0)$  并记  $H_f(P_0)=\begin{matrix} A & B \\ B & C \end{matrix}$  称为 Hessian 矩阵。

## 二元函数极值定义

$z=f(x,y)$  在  $(x_0, y_0)$  的某邻域内有定义，对邻域内的任一点  $(x, y)$

均有  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$  则称函数在  $(x_0, y_0)$  有极大值。均有  $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$  则称函数在  $(x_0, y_0)$  有极小值。

## 二元函数取得极值的条件

### 必要条件

$z=f(x,y)$  在点  $(x_0, y_0)$  有偏导，且在点  $(x_0, y_0)$  有极值，则它在该点的偏导数必为零。

### 稳定点充分条件

$z=f(x,y)$  在点  $P_0(x_0, y_0)$  的邻域内有一二阶连续偏导，且  $P_0$  是  $f$  的稳定点。

$H_f(P_0)$  正定时  $f$  在  $P_0$  取极小值

$H_f(P_0)$  负定时  $f$  在  $P_0$  取极大值

$H_f(P_0)$  不定时  $f$  在  $P_0$  不取极值

### 判定条件

记  $A=f_{xx}(x_0, y_0)$ ,  $B=f_{xy}(x_0, y_0)$ ,  $C=f_{yy}(x_0, y_0)$

$AC-B^2 > 0 \rightarrow$

$a < 0 \rightarrow$  极大值,  $a > 0 \rightarrow$  极小值

$AC-B^2 < 0 \rightarrow$  无极值

## 多元函数

一阶偏导均为零，存在二阶连续偏导。

Hessian 矩阵正定：极小

Hessian 矩阵负定：极大

## 15.7 条件极值

## 拉格朗日乘数法

求  $z=f(x, y)$  在条件  $\varphi(x, y)=0$  下的可能极值点：

先构造函数  $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = 0$  再由

$$\begin{cases} L_x = f_x(x, y) + \lambda\varphi_x(x, y) = 0 \\ L_y = f_y(x, y) + \lambda\varphi_y(x, y) = 0 \\ L_\lambda = \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

解出  $x, y, \lambda$  其中  $x, y$  就是可能的极值点的坐标。

### 一般形式拉格朗日乘数法

条件组  $\varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, k=1, 2, \dots, m (m < n)$  的限制下，求  $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的极值。

其拉格朗日函数是  $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^m \lambda_k \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$

设  $f$  与  $\varphi_k$  均在  $D$  内有连续的一阶偏导，若  $P_0(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in D$  是上述问题的极值点，且 Jacobian 矩阵

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

行满秩，则存在  $m$  个常数  $\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)}$  使得  $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)})$  为上述拉格朗日函数的稳定点。

### 判定条件

1. 消去限定条件，得到函数，求此函数 Hessian 矩阵，判断其正定性。
2.  $H_L(P_0) = \left( \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_k} \right)_{P_0}$ 
  1.  $H_L(P_0)$  正定，取条件极小值
  2.  $H_L(P_0)$  负定，取条件极大值
  3. 证明：泰勒
3. 确有极值，仅有一个稳定点，在定义域的边界上不取/趋极值，则稳定点就是条件极值点。

## 16 重积分

### 16.1 二重积分的定义与基本性质

#### 区域的面积

有界区域  $P \subset \mathbb{R}^2$  用直线网  $T$  将其分割。

选取方式：

1.  $\Delta_i$  上的点均为  $P$  的内点
2.  $\Delta_i$  上至少有一点为  $P$  的内点，且  $P$  的任意边界点均含于某  $\Delta_i$

第一类面积  $s_{-P}(T)$

第二类面积  $S_{-P}(T) \geq s_{-P}(T)$

数集  $\{s_{-P}(T)\}$  有上确界  $\{s_{-P}(T)\}$  有下确界。

记  $\underline{I}_{-P} = \sup \lim_{T \rightarrow \infty} \{s_{-P}(T)\}$ ,  $\overline{I}_{-P} = \inf \lim_{T \rightarrow \infty} \{S_{-P}(T)\}$   
易见  $0 \leq \underline{I}_{-P} \leq \overline{I}_{-P}$

称  $\underline{I}_{-P}$  为  $P$  的内面积  $\overline{I}_{-P}$  为  $P$  的外面积。

若  $\underline{I}_{-P} = \overline{I}_{-P}$  则称  $P$  为可求面积的图形，将其共同值作为  $P$  的面积。

$P$  可求面积  $\iff \forall \epsilon > 0, \exists T, \text{ s.t. }; S_{-P}(T) - s_{-P}(T) < \epsilon$

## 二重积分

$\iint_D f(x, y) \mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$

直角坐标系下可写为：

$\iint_D f(x, y) \mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$

## 二重积分的存在性

**Th. 16.2.1**

$f(x, y)$  在  $D$  上可积，则  $f(x, y)$  在  $D$  上有界。

**Th. 16.2.2**

$f(x, y)$  在  $D$  上可积  $\iff \lim_{|T| \rightarrow 0} S(T) = \lim_{|T| \rightarrow 0} s(T)$

**Th. 16.2.3**

$f(x, y)$  在  $D$  上可积  $\iff \forall \epsilon > 0, \exists T, \text{ s.t. }; S(t) - s(T) < \epsilon$

**Th. 16.2.4**

有界闭域上的连续函数必可积。

**Th. 16.2.5**

$f(x, y)$  是定义在有界闭域上的有界函数，若其不连续点都落在有限条光滑曲线上，则  $f(x, y)$  在该有界闭域内可积。

## 二重积分性质

### 保数乘

$$\iint\limits_D kf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=k\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

### 保加

$$\iint\limits_D [f(x,y)\pm g(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\pm\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

### 区域可加性

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$(D=D_1\cup D_2, D_1\cap D_2=\varnothing)$$

### 常数函数

$$\text{面积 } \sigma = \iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

### 保序性

在  $D$  上  $f(x, y) \leq g(x, y)$  则有

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

特别地  $\left| \iint\limits_D \{f(x,y)\} \right| \leq \iint\limits_D \{|f(x,y)|\}$

### 估值不等式

在闭区域  $D$  上  $m \leq f(x, y) \leq M$  为  $D$  的面积，则有

$$m\sigma \leq \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq M\sigma$$

### 二重积分中值定理

在闭区域  $D$  上  $f(x, y)$  连续  $\sigma$  为  $D$  的面积，则在  $D$  上至少存在一点  $(\xi, \eta)$  使得

$$\iint_D f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_a^b \int_c^d f(x,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$

## 16.2 二重积分的计算

### 矩形区域上二重积分计算

#### 累次积分

$D=[a, b] \times [c, d]$ ;  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  若对  $\forall x \in [a, b]$   $f(x, y)$  在  $[c, d]$  上可积, 那么可得  $I(x) = \int_c^d f(x, y) \mathrm{d}y$ ;  $x \in [a, b]$  若  $I(x)$  也在  $[a, b]$  上可积, 则得积分

$\int_a^b I(x) \mathrm{d}x$  称为累次积分。记为  $\int_a^b \int_c^d f(x, y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x$

#### 存在条件

$D=[a, b] \times [c, d]$ ;  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  在  $D$  上可积, 且对  $\forall x \in [a, b]$   $\int_c^d f(x, y) \mathrm{d}y$  都存在, 则累次积分存在, 且

$$\iint_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$

$D=[a, b] \times [c, d]$ ;  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  在  $D$  上可积, 且对  $\forall y \in [c, d]$   $\int_a^b f(x, y) \mathrm{d}x$  都存在, 则累次积分存在, 且

$$\iint_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

$f$  在  $D=[a, b] \times [c, d]$  上连续, 则有

$$\iint_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$

### 一般区域上二重积分计算

$x$  型区域  $D = \{(x, y) \mid y_1(x) \leq y \leq y_2(x), a \leq x \leq b\}$

$y$  型区域  $D = \{(x, y) \mid x_1(y) \leq x \leq x_2(y), c \leq y \leq d\}$

一般将一般区域分解成有限个无公共内点的  $x$  或  $y$  型区域处理。

#### 存在定理

$f(x, y)$  在  $x$  型区域  $D$  上连续  $y_1(x), y_2(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则

$$\iint_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$

$f(x,y)$  在  $y$  型区域  $D$  上连续,  $x_1(y), x_2(y)$  在  $[c, d]$  上连续, 则

$$\iint_D f(x,y) dx = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y) dx dy$$

## 二重积分的变量变换

简化被积函数

简化积分域 ( 优先 )

变量变换公式

$$\mathbf{Th.};$$

$f(x, y)$  在有界闭域  $D$  上可积, 若变换  $T: x=x(u, v), y=y(u,v)$  将  $uv$  平面上按段光滑封闭曲线所围的区域  $\Delta$  一对一的映成  $xy$  平面上的闭区域  $D$  函数  $x(u, v), y(u, v)$  在  $\Delta$  内分别具有一阶连续偏导数, 且  $J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0, \forall (u, v) \in \Delta$  则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv$$

面积变化率  $J = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$

在  $\Delta$  内个别点上或在一条曲线上为零公式仍成立。

极坐标换元

含有  $x^2+y^2$  或边界表达式有该项, 常用极坐标变换。

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

广义极坐标变换

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(ar \cos \theta, br \sin \theta) abr r dr d\theta$$

## 16.3 三重积分

定义

$f(x, y, z)$  是定义在三维空间可求体积的有界闭区域  $V$  上的函数,  $A$  是某确定常数, 若

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{s.t.}; \forall T, |T| < \delta \Rightarrow \left| \int_T f(x, y, z) dx dy dz - A \right| < \epsilon$$

$(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in V_i, \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i - A \right| < \varepsilon$

则称  $f(x, y, z)$  在  $V$  上可积称为  $f$  在  $V$  上的三重积分，记为

$$I = \iiint_V f(x, y, z) \mathrm{d}V$$

或

$$I = \iiint_V f(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

### 三重积分的计算

$f(x, y, z)$  在  $V = [a, b] \times [c, d] \times [e, h]$  上的三重积分存在，且对任何  $(x, y) \in D, D = [a, b] \times [c, d]$  定积分  $F(y, z) = \int_a^b f(x, y, z) \mathrm{d}x$  存在，则  $\iint_D \int_a^b f(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$  存在，且

$$\iiint_V f(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z = \iint_D \int_a^b f(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

$f(x, y, z)$  在  $V = [a, b] \times [c, d] \times [e, h]$  上的三重积分存在，且对任何  $z \in [e, h]$  二重积分  $I(z) = \iint_D f(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$  存在， $D = [a, b] \times [c, d]$  则  $\int_e^h \int_a^b \int_c^d f(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$  存在，且

$$\iiint_V f(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z = \int_e^h \iint_D f(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

$$\iiint_V f(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z = \int_a^b \int_c^d \int_e^h f(x, y, z) \mathrm{d}z \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$

### 例

$$\mathbf{Prove:} \quad \int_0^x \int_0^v \int_0^u f(t) \mathrm{d}t \mathrm{d}v \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 f(t) \mathrm{d}t$$

$\mathbf{Proof:}$

$$\begin{aligned} & \text{because } \int_0^v \int_0^u \int_0^t f(t) \mathrm{d}t \mathrm{d}u \mathrm{d}v = \int_0^x \int_0^v \int_0^v (v-t) f(t) \mathrm{d}t \mathrm{d}v \\ & \int_0^x \int_0^v \int_0^u \int_0^t f(t) \mathrm{d}t \mathrm{d}u \mathrm{d}v = \int_0^x \int_0^v \int_0^v (v-t) f(t) \mathrm{d}t \mathrm{d}v \\ & = \int_0^x \int_0^v \int_0^v (v-t) f(t) \mathrm{d}t \mathrm{d}v = \int_0^x \int_0^v \left[ \frac{1}{2} (v-t)^2 f(t) \right]_t=0^v \mathrm{d}v \mathrm{d}x \\ & = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 f(t) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

### 三重积分的换元

### 变量变换公式

$f(x, y, z)$  在有界闭区域  $V$  上可积, 若变换  $T: x=x(u, v, w), y=y(u, v, w), z=z(u, v, w)$  将  $uvw$  空间中的区域  $V'$  一对一的映成  $xyz$  空间中的区域  $V$  函数  $x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)$  及它们的一阶偏导在  $V'$  内连续, 且函数的行列式  $J(u, v, w) = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \neq 0, (u, v, w) \in V'$  则

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| J(u, v, w) \right| \, du \, dv \, dw$$

### 柱面坐标变换

$$\begin{cases} x=r\cos \theta, \\ y=r\sin \theta, \\ z=z. \end{cases}$$

Jacobian 行列式 :

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \left| \begin{matrix} \cos\theta & -r\sin \theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right| = r$$

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{V'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r \, dr \, d\theta \, dz$$

### 球坐标变换

$$\begin{cases} x=r\sin \varphi \cos \theta, \\ y=r\sin \varphi \sin \theta, \\ z=r\cos \varphi. \end{cases}$$

Jacobian 行列式 :

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} = \left| \begin{matrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{matrix} \right| = r^2 \sin \varphi$$

### 广义球坐标变换

### 球坐标变换

$$\begin{cases} x=a\sin \varphi \cos \theta, \\ y=b\sin \varphi \sin \theta, \\ z=c\cos \varphi. \end{cases}$$

Jacobian 行列式 :

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} = abc r^2 \sin \varphi$$

## 16.4 重积分应用

### 曲面方程

#### 显式

$$z=z(x, y), (x, y)\in D$$

#### 隐式

$$F(x, y, z)=0, (x, y, z)\in V$$

通常假设  $F, F_x, F_y, F_z$  在  $V$  上连续。

曲面在点的法向量的各分量即为偏导。

#### 参数方程

设  $\Delta$  是  $uv$  平面上的一个区域，则称

$$\Sigma: \vec{r}=\vec{r}(u, v), (u, v)\in \Delta$$

为曲面的向量方程，其中  $\vec{r}(u, v)\in \mathbb{R}^3$

如记  $\vec{r}=(x, y, z)$  则 (1) 又可表示成

$$\begin{cases} x=x(u, v) \\ y=y(u, v) \\ z=z(u, v) \end{cases}, \quad (u, v)\in \Delta$$

称此为曲面的参数方程。

### 曲面面积

方程  $z=f(x, y), (x, y)\in D$  其中  $D$  是可求面积的平面有界区域  $f(x, y)$  在  $D$  上有连续的一阶偏导。

$$S=\iint\limits_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

方程  $x(u, v), y(u, v), z(u, v); (u, v)\in D$   $D$  可求面积  $x, y, z$  在  $D$  上有一阶连续偏导  $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$  中至少一个不为零，则曲面  $S$  的面积为

$$\Delta S=\iint\limits_D \sqrt{EG-F^2} \mathrm{d}u \mathrm{d}v,$$

$$E=x_u^2+y_u^2+z_u^2,$$

$$F=x_u x_v+y_u y_v+z_u z_v,$$

$$G=x_v^2+y_v^2+z_v^2.$$

(第一基本量???)

## 重心

### 平面区域

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x \rho(x, y) \, d\sigma}{\iint_D \rho(x, y) \, d\sigma}, \bar{y} = \frac{\iint_D y \rho(x, y) \, d\sigma}{\iint_D \rho(x, y) \, d\sigma}$$

### 空间区域

$$\bar{x} = \frac{\iiint_V x \rho(x, y, z) \, dV}{\iiint_V \rho(x, y, z) \, dV}, \bar{y} = \frac{\iiint_V y \rho(x, y, z) \, dV}{\iiint_V \rho(x, y, z) \, dV}, \bar{z} = \frac{\iiint_V z \rho(x, y, z) \, dV}{\iiint_V \rho(x, y, z) \, dV}$$

## 转动惯量

$$J = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) \, dV$$

## 引力

质点  $A(x_i, y_i, z_i)$

$$F = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$F_x = k \iiint_V \frac{(x-x_i)^{-2}}{r^3} \rho(x, y, z) \, dV$$

$$F_y = k \iiint_V \frac{(y-y_i)^{-2}}{r^3} \rho(x, y, z) \, dV$$

$$F_z = k \iiint_V \frac{(z-z_i)^{-2}}{r^3} \rho(x, y, z) \, dV$$

$$r = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}$$

# 17 曲线积分

## 17.1 第一型曲线积分

### 定义

$L$  为可求长的曲线弧，函数  $f(x, y)$  在  $L$  上有界，用  $L$  上的点将  $L$  分割，若极限

$$\lim_{\max \Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i = A$$

且  $A$  为有限数，取值与分割及取样点的选取无关，则称  $f(x, y)$  在  $L$  上可积，称  $A$  为函数  $f(x, y)$  在曲线弧  $L$  上对弧长的曲线积分，或第一型曲线积分，记作

$$\int_L f(x, y) \mathrm{d}s$$

类似地，三维空间上有：

$$\int_L f(x, y, z) \mathrm{d}s$$

## 存在条件

$f(x, y)$  在光滑曲线弧  $L$  上连续时，第一型曲线积分  $\int_L f(x, y) \mathrm{d}s$  存在。

## 性质

### 线性性

$$\int_L \sum c_i f_i \mathrm{d}s = \sum c_i \int_L f_i \mathrm{d}s$$

### 路径可加

$$\int_L f \mathrm{d}s = \sum \int_{L_i} f \mathrm{d}s$$

## 约定

$L$  为闭曲线时，函数  $f(x, y)$  在  $L$  上的第一型曲线积分记为

$$\oint f(x, y) \mathrm{d}s$$

## 计算

设光滑曲线  $L: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}; t \in [\alpha, \beta]$  且  $f(x, y)$  在  $L$  上有定义且连续，则：

$$\int_L f(x, y) \mathrm{d}s = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} \mathrm{d}t$$

## 17.2 第二型曲线积分

## 定义

$L$  为平面内从点  $A$  到  $B$  的一条可求长的曲线弧，函数  $P(x, y), Q(x, y)$  在  $L$  上有定义，对  $L$  的任一分割  $T$  设小段弧长为  $\Delta s_i$  分割的细度  $\|T\| = \max\{|\Delta s_i| \mid i=1, \dots, n\}$  任取  $(\xi_i, \eta_i) \in \overline{M_{i-1}M_i}$  若极限

$$\lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i$$

存在，且与分割  $T$  及  $(\xi_i, \eta_i)$  的取法无关，称此极限为  $P(x, y), Q(x, y)$  沿有向曲线  $L$  上的第二型曲线积分，记为：

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

或

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

或

$$\int_L P(x, y) dx + \int_L Q(x, y) dy$$

简记为

$$\int_L P dx + Q dy$$

如果  $L$  是封闭的有向曲线，则记为

$$\oint_L P dx + Q dy$$

设  $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ ,  $\mathrm{d}\vec{s} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$

则又可记为

$$\int_L \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

## 存在条件

$P, Q$  在有向光滑曲线弧  $L$  上连续时，第二类曲线积分存在。

## 推广

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz$$

## 性质

### 线性性

$$\int_L \left( \sum c_i P_i \right) dx + \left( \sum c_i Q_i \right) dy = \sum c_i$$

$$\left(\int_L P \, dx + \int_L Q \, dy\right)$$

## 曲线段可加性

$$\int_L P \, dx + Q \, dy = \sum \int_{L_i} P \, dx + Q \, dy$$

## 有向性

$$\int_{-L} P \, dx + Q \, dy = -\int_L P \, dx + Q \, dy$$

## 计算

设光滑曲线  $L: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}; t \in [\alpha, \beta]$  参数  $t$  单调地由  $\alpha$  变到  $\beta$  时，点  $M(x, y)$  从  $A$  变到  $B$ ， $\varphi, \psi$  在  $[\alpha, \beta]$  上有一阶连续导数  $f(x, y)$  在  $L$  上有定义且连续，则第二型曲线积分  $\int_L P \, dx + Q \, dy$  存在，且

$$\int_L P \, dx + Q \, dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left( P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \right) dt$$

## 联系

$$\int_L P \, dx + Q \, dy = \int_L (P \cos \alpha + Q \sin \beta) ds$$

## 注意

被积函数相同，起终点相同，但是路径不同积分结果不一定相同。

## 17.3 格林公式

### 17.3.1 平面区域的分类与边界的定向

若  $D$  内任一闭曲线所围成的部分都属于  $D$  则称  $D$  为平面单连通区域；否则称为复连通区域。  
(亏格?)

$D$  的边界曲线的正方向：人沿边界行走时，区域  $D$  总在他的左手边。

(逆时针?)

### 17.3.2 Green 公式

### 定理

设闭区域  $D$  由分段光滑的曲线  $L$  围成，函数  $P(x, y), Q(x, y)$  在  $D$  上具有一阶连续偏导，则有

$$\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{L}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

其中  $L$  是  $D$  的取正方向的边界曲线。

### 证明：分块

即证：

$$\iint\limits_{D}\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{L}Q\mathrm{d}y\text{ (Y型区域上)}$$
$$\iint\limits_{D}\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{L}P\mathrm{d}x\text{ (X型区域上)}$$

### 意义

建立了二重积分和曲线积分的一种等式关系

揭示了函数在区域内部与边界间的内在联系

另一种记法：

$$\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial}{\partial x}P+\frac{\partial}{\partial y}Q\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{L}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

### 17.3.3 应用

若  $L$  是非封闭曲线，则先补再用。

若  $L$  所围闭域为  $D$  有奇点则挖掉再用。

### 17.3.4 曲线积分与路径无关的条件

#### 定义

$D$  是一个区域， $P, Q$  在  $D$  内有一阶连续偏导，如果对  $D$  内任意给定的两点  $A, B$  以及  $D$  内从  $A$  到  $B$  的任意两条曲线  $L_1, L_2$  都有  $\int_{L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L_2}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$  则称曲线积分  $\int_{L}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$  在  $D$  内与路径无关。

#### 条件

$D$  是单连通闭区域，若  $P(x, y)$  和  $Q(x, y)$  在  $D$  内有一阶连续偏导，则下列四个条件等价：

1. 沿  $D$  内任一按段光滑封闭曲线  $L$  有  $\oint_L P \mathrm{d}x + Q \mathrm{d}y = 0$
2. 在  $D$  内  $\int_L P \mathrm{d}x + Q \mathrm{d}y$  与路径无关。
3. 在  $D$  内存在  $u(x, y)$  使得  $\mathrm{d}u = P \mathrm{d}x + Q \mathrm{d}y$
4. 在  $D$  内,  $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$

## 全微分方程

若存在  $u(x, y)$  使得  $\mathrm{d}u = P \mathrm{d}x + Q \mathrm{d}y$  则称  $P \mathrm{d}x + Q \mathrm{d}y = 0$  为全微分方程。

当  $P(x, y)$  和  $Q(x, y)$  在单连通区域  $D$  内有一阶连续偏导时,

全微分方程合法  $\iff \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

# 18 曲面积分

## 18.1 第一型曲面积分

### 表示

1. 显式  $z = z(x, y), (x, y) \in D$
2. 隐式  $F(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in V$  (通常假设  $F, F_x, F_y, F_z$  在  $V$  上连续)
3. 参数  $\mathit{\Sigma}: \vec{r} = \vec{r}(u, v), (u, v) \in \Delta \subset \mathbb{R}^2$  或:

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in \Delta$$

### 面积

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

参数方程:

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in D$$

$x, y, z$  在有界区域  $D$  上有连续一阶偏导, 且  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}$  中至少一个不为零, 则曲面  $S$  的面积为

$$\Delta S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} \mathrm{d}u \mathrm{d}v, \\ E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2.$$

$\sqrt{EG - F^2}$  称曲面的第一基本量

### 定义

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) \mathrm{d}S = \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

### 计算

$\Sigma$  是正则曲面，参数方程为  $\vec{r} = \vec{r}(u, v), (u, v) \in \Delta$

函数  $f(x, y, z)$  在  $\Sigma$  上连续，则有

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) \mathrm{d}S = \iint_{\Delta} f(\vec{r}(u, v)) \sqrt{1 + r_u^2 + r_v^2} \mathrm{d}u \mathrm{d}v$$

$z = g(x, y), f$  在  $\Sigma$  上连续，

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) \mathrm{d}S = \iint_{\Delta} f(x, y, \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}) \mathrm{d}u \mathrm{d}v$$

## 18.2 第二型曲面积分

曲面法向量的指向决定曲面的侧。

单位时间流量元  $\Delta \Phi = \vec{v} \cdot \vec{n} \Delta A$

速度  $\vec{v}$

法向量  $\vec{n}$

### 定义

$$\iint_{\Sigma} P \mathrm{d}y \mathrm{d}z + \iint_{\Sigma} Q \mathrm{d}z \mathrm{d}x + \iint_{\Sigma} R \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_{i_{yz}} + \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_{i_{zx}} + \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_{i_{xy}}$$

### 计算

$\Sigma: x = x(y, z),$

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) \mathrm{d}y \mathrm{d}z = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

## 两类积分联系

$z = z(x, y), (x, y) \in D$

$\cos\alpha = \frac{\mp z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},$

$\cos\beta = \frac{\mp z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},$

$\cos\gamma = \frac{\mp 1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}.$

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) \mathrm{d}S$$

## 参数方程处理

$\vec{r} = \vec{r}(u, v), (u, v) \in \Delta$

$\vec{F} = (P, Q, R)$  在  $S$  上连续

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) \mathrm{d}S = \iint\limits_{\Delta} \vec{F} \circ \vec{r} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \mathrm{d}u \mathrm{d}v$$

## 18.3 Gauss 公式与 Stokes 公式

### Gauss 公式

空间闭区域  $V$  由分片光滑的双侧封闭曲面  $S$  围成，函数  $P, Q, R$  在  $V$  上连续，且具有一阶连续偏导，则

$$\iiint\limits_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z = \oiint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) \mathrm{d}S$$

其中  $S$  取外侧。此式称高斯公式。

### 双侧曲面的侧与其边界曲线方向

边界曲线方向与法向量方向根据右手螺旋定则判断。

### 斯托克斯公式

$S$  是光滑的双侧曲面，边界曲线  $\Gamma$  是按段光滑的连续曲线，若函数  $P, Q, R$  在  $S$  连同

$\Gamma$ 上连续，且有连续的一阶偏导数，则：

$$\iint\limits_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oiint\limits_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz$$

### 行列式形式

$$\iint\limits_S \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oiint\limits_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz$$

## 18.4 场论

### 概念

数量场：  
 $f(x, y, z)$

向量场：  
 $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$

### 梯度场

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$  为一开集，函数  $f$  连续可微。

$$\text{grad} f(\vec{p}_0) = \frac{\partial f(\vec{p}_0)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f(\vec{p}_0)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f(\vec{p}_0)}{\partial z} \vec{k}$$

沿此方向，方向导数取最大值。

### Nabla 算子

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

- $\nabla(cf) = c\nabla f$
- $\nabla(f \cdot g) = f\nabla g + g\nabla f$
- $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
- $\nabla(\text{div } f) = (\text{div } f)\nabla$

### 散度场

$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  为空间区域  $V$  上的向量值函数，定义数量函数

$$D(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

称为向量函数  $\vec{F}$  在  $(x, y, z)$  处的散度，记为  $\mathrm{div}\vec{F}$

高斯公式可写为：

$$\iiint_V \mathrm{div}\vec{F} \, dx \, dy \, dz = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{S}$$

上式两边取某一点  $M_0$  处的极限，可知  $\mathrm{div}\vec{F}(M_0)$  是流量对体积  $V$  的变化率。

$\mathrm{div}\vec{F}(M_0) > 0$  流出，称为源

$\mathrm{div}\vec{F}(M_0) < 0$  流入，称为汇

若  $\forall P \in V, \mathrm{div}\vec{F}(P) = 0$  称  $\vec{F}$  是无源场。

散度可记为  $\mathrm{div}\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$

性质：

1. 线性性
2.  $\nabla \cdot (\varphi \vec{F}) = \varphi \nabla \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \nabla \varphi$
3.  $\varphi$  是数量场，则  $\nabla \cdot \nabla \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$

记  $\nabla \cdot \nabla = \Delta$  称 Laplace 算子。

若数量场  $f$  满足 Laplace 方程  $\Delta f = 0$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

则称  $f$  是  $V$  上的调和函数。

## 旋度场

$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  为空间区域  $V$  上的向量值函数，定义向量函数：

$$\mathrm{rot} \vec{F} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

称其为向量场  $\vec{F}$  在  $(x, y, z)$  处的旋度。其形成的场为旋度场。

或记：

$$\mathrm{rot} = \left( \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{matrix} \right)$$

或记：

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$$

斯托克斯公式可记为：

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

## 势

存在  $\varphi$  使得  $\operatorname{grad} \varphi = \vec{F}$  则称向量场  $\vec{F}$  是有势场。

对含于  $V$  的任一封闭曲线  $\Gamma$   $\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$  则称  $\vec{F}$  是  $V$  上的一个保守场。

如果  $\operatorname{rot} \vec{F} \equiv \vec{0}$  则称  $\vec{F}$  是  $V$  上的一个无旋场。

上述三个条件等价。

## 空间曲线积分与路径无关性

### 空间区域

若  $V$  内任一封闭曲线皆可以不经过  $V$  外的点而连续收缩为  $V$  内的一点，则称  $V$  为单连通区域。（亏格为 0？同胚于球？）否则称为复连通区域。

### 路径无关性

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$  是单连通区域， $P, Q, R$  在  $\Omega$  上连续，且有一阶连续偏导，则下列四个条件等价：

- 对任一按段光滑封闭曲线  $L$   $\int_L P dx + Q dy + R dz = 0$
- $\Omega$  内  $\int_L P dx + Q dy + R dz$  与路径无关
- $\exists u(x, y, z)$   
 $\operatorname{s.t.} \operatorname{d}u = P dx + Q dy + R dz$
- $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} \equiv \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial z}$

From:

<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:

[https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:mian:pantw:real\\_analysis&rev=1588909521](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:mian:pantw:real_analysis&rev=1588909521)

Last update: 2020/05/08 11:45