

工科数学分析 (2)

11 数项级数

11.1 数项级数的收敛性

11.2 正项级数的敛散性

正项级数比较判别法 (很直观)

柯西积分判别法

$x \geqslant 1, f(x) \geqslant 0, f(x)$ 递减 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(x)$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 同敛散

正项级数柯西判别法 (与几何级数比较)

- $\exists 0 < q < 1, N \in \mathbb{N}^+, s.t. n > N \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛
- $\forall N \in \mathbb{N}^+, \exists n > N, s.t. \sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散
- $a_n \geq 0, (\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q) \vee (\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{a_n} = q)$ 则
 - $q < 1 \Rightarrow$ 敛
 - $q > 1 \Rightarrow$ 散

正项级数达朗贝尔判别法

- $a_n > 0, b_n > 0, \exists n_0, (n \geq n_0 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n})$ 则 $\sum b_n$ 敛 $\Rightarrow \sum a_n$ 敛, $\sum a_n$ 散 $\Rightarrow \sum b_n$ 散
- $a_n > 0$
 - $\exists 0 < q < 1, n_0 \in \mathbb{N}^+, \text{ s.t. } n \geq n_0 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1 \Rightarrow \sum a_n$ 收敛
 - $\exists n_0 \in \mathbb{N}^+, \text{ s.t. } n \geq n_0 \Rightarrow$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \Rightarrow \sum a_n$ 发散

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$
 1. $q < 1 \Rightarrow \sum a_n$ 敛
 2. $q > 1 \Rightarrow \sum a_n$ 散
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1 \Rightarrow \sum a_n$ 敛
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1 \Rightarrow \sum a_n$ 散

正项级数拉贝判别法

1. $a_n > 0$
 - $\exists r > 1, N_0 \in \mathbb{N}^{\ast}$, 当 $n > N_0$ 时, 有 $n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \geq r > 1$, 则 $\sum a_n$ 敛
 - $\exists N_0 \in \mathbb{N}^{\ast}$, 当 $n > N_0$ 时, 有 $n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \leq 1$, 则 $\sum a_n$ 散
2. $a_n > 0, \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) \quad (n \rightarrow \infty)$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = l$ 则
 - $l > 1 \Rightarrow \sum a_n$ 敛
 - $l < 1 \Rightarrow \sum a_n$ 散

11.3 一般级数收敛问题

莱布尼茨判别法

交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, a_n > 0$ 若 $\{a_n\}$ 递减趋于 0 , 则级数收敛。

分部求和公式

$\{a_n\}, \{b_n\}$ 是实数列 $\forall n \in \mathbb{N}^{\ast}$,

$S_k = \sum_{i=1}^k a_i, S_0 = 0$ 则

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) + S_n b_n \quad \text{displaystyle}$$

(我觉得这就跟分部积分一模一样嘛)

$$\int S \mathrm{d}T = ST - \int T \mathrm{d}S$$

把 a_n 看成 $\mathrm{d}S$, b_n 看成 T $\sum ab = \int T \mathrm{d}S = ST - \int S \mathrm{d}T$
 $T = b, \sum a + \sum (\sum a)(b_k - b_{k+1})$

阿贝尔引理

$\{b_n\}$ 单调 $|\sum a_n| \leq M$ 则 $|\sum_{k=1}^n a_k b_k| \leq M(|b_1| + 2|b_n|)$.

狄利克雷判别法

$\{b_n\}$ 单调递减趋 0 $\sum a_n$ 有界 $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛.

阿贝尔判别法

$\{b_n\}$ 单调有界 $\sum a_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛.

11.4 更序问题与级数乘法

更序问题

Th. 11.4.1

若级数绝对收敛，则其正项和与负项和均收敛；
若其条件收敛，则两者均发散到无穷大。

Th. 11.4.2

若级数绝对收敛，则任意调整其中各项顺序得到的新级数也绝对收敛，且和不变。

Th. 11.4.3; **Riemann 更序定理**

若级数条件收敛，则可以通过调整其中的项的顺序使其收敛到任一确定实数。

级数乘法

Def.; **Cauchy 乘积**

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \dots + x_n y_1)$$

称为级数 $\sum x_n$ 和 $\sum y_n$ 的 Cauchy 乘积。

Th. 11.4.3; **Cauchy 定理**

两级数收敛，则其柯西积亦收敛，且收敛于两级数收敛值之积。

12 函数项级数

12.1 收敛性

逐点收敛

$\forall x_0 \in I$ 若 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛到 $f(x_0)$ 则称 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上逐点收敛.

一致收敛

$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0$ 当 $n > N(\varepsilon)$ 时, $\forall x \in I$ 有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ 成立, 则称函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于 $f(x)$ 记为 $f_n(x) \xrightarrow{\text{uni}} f(x)$.

12.2 一致收敛的判别

余项定理

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$ iff $f_n(x) \xrightarrow{\text{uni}} f(x) \quad (n \in \mathbb{N}^{\star})$

柯西收敛定理

$\forall x_0 \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N(x_0, \varepsilon) \in \mathbb{N}^{\star}, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}^{\star}: |f_n(x_0) - f_{n+p}(x_0)| < \varepsilon$ iff $\{f_n(x)\}$ 在 I 上逐点收敛.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^{\star}, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}^{\star}, \forall x \in I: |f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \varepsilon$ iff $\{f_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛.

维尔斯特拉斯(Weierstrass)判别法(M 判别法, 控制判别法)

若存在收敛的正项级数 $\sum a_n$ 使得 $\forall x \in I$ 都有 $|u_n(x)| \leq a_n$ 则 $\sum u_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

狄利克雷判别法

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$

若在 I 上:

$\{b_n(x)\}$ 对固定的 x 单调, 一致收敛至 0 .

$\sum_{n=1}^N a_n(x)$ 在 I 上一致有界.

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

阿贝尔判别法

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$$

若在 I 上：

$b_n(x)$ 对固定的 x 单调，在 I 上一致有界。

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 I 上一致收敛。

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛。

12.3 极限函数/和函数性质

连续性

$f_n(x)$ 在 I 上连续 $\xrightarrow{\text{一致收敛}} f(x)$ 则 $f(x)$ 在 I 上连续。

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $S(x)$ 则 $u_n(x) \in C_{\{I\}} \rightarrow S(x) \in C_{\{I\}}$

Dini 定理

$f_n(x) \in C[a, b]$ 若对任意给定 $x \in [a, b]$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ $f_n(x)$ 递减，则 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 0 。

$f_n(x) \in C[a, b]$ 且收敛于 $f(x)$ 若对任意给定 $x \in [a, b]$ $f_n(x)$ 单调，则 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), u_n(x) \in C[a, b], u_n(x) \geq 0$ 若 $S(x) \in C[a, b]$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛。

积分

$f_n(x) \in R[a, b]$ $\xrightarrow{\text{一致收敛}} f(x)$ 则 $f \in R[a, b]$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

(极限和积分交换顺序)

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{\text{一致收敛}} S(x), u_n(x) \in R[a, b]$ 则 $S(x) \in R[a, b], \int_a^b (\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx$

求导

$f_n(x) \in C[a, b], f_n(x) \xrightarrow{\text{一致收敛}} g(x), \exists x_0 \in [a, b], \{f_n(x_0)\}$ 收敛 $\rightarrow \{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$ 且对 $\forall x \in [a, b], f_n'(x) = g(x)$ 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x)$

$\{u_n\} \in C[a, b]$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛 \Rightarrow $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$ 且 $S(x) \in C[a, b]$, $S(x) = g(x)$ 即 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$

12.4 幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

收敛性

Abel 定理

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

若在 $x_0 \neq 0$ 处收敛, 则对所有 $|x| < |x_0|$ 绝对收敛。

若在 $x_1 \neq 0$ 处发散, 则对所有 $|x| > |x_1|$ 发散。

收敛半径

$$R \in [0, +\infty)$$

收敛半径公式

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

代数性质

$$\sum a_n x^n: R_a, \sum b_n x^n: R_b, R = \min\{R_a, R_b\}. \text{ 则:}$$

$$\sum (a_n \pm b_n) x^n = \sum a_n x^n \pm \sum b_n x^n \text{ 在 } (-R, R) \text{ 上成立.}$$

$$\sum a_n x^n, \sum b_n x^n \text{ 的柯西积在 } (-R, R) \text{ 上绝对收敛.}$$

内闭一致收敛性

$$\forall [L, K] \subset (-R, R) \sum a_n x^n \text{ 在 } [L, K] \text{ 上一致收敛.}$$

分析性质

Abel 第二定理

$$\lim_{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \quad (\text{收敛时})$$

$$\lim_{x \rightarrow (-R)^+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n \quad (\text{收敛时})$$

导数性质

$S(x) = \sum a_n x^n: R, \quad S(x) \in C(-R, R)$ $\Rightarrow S(x)$ 在 $(-R, R)$ 上有任意阶导数, 则

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k} \\ k! = \sum_{n=k}^{\infty} n^{\underline{k}} a_n x^{n-k}$$

收敛域可能改变 (端点处)

积分性质 (???)

$S(x) \in R(-r, r)$ 且可逐项积分, 即对 $\forall x \in (-R, R)$ 有

$$\int_0^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

端点性质可能改变

展开

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n, \quad x \in (x_0-R, x_0+R)$$

f 的泰勒级数收敛于 f iff $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \forall x \in U(x_0, R)$

f 的泰勒级数收敛于 f $\Leftrightarrow |f^{(n)}(x)| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in U(x_0, R)$ 即 $\{f^{(n)}(x)\}$ 在 (x_0-R, x_0+R) 一致有界

例

这个例 8 有点生成函数的味道?

$$f(x) = \frac{1}{1-2x^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1-2x} \right) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$

应用

求和、求导、求积

用各种基本式子去凑..

看起来好难啊

13 Fourier 级数

$$y = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

13.1 周期函数的 Fourier 级数

“一切周期函数都可展成三角函数的无穷级数”

三角级数

$$y = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

三角函数系及其正交性

三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

正交

任两个不同函数的乘积在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分为 0.

(积化和差 和差化积)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

傅里叶级数

傅里叶系数

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right] \mathrm{d}x = a_0 \pi \iff a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \mathrm{d}x + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx \mathrm{d}x) = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \mathrm{d}x = a_n \pi \iff a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x$$

$$\text{同理 } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x$$

傅里叶级数

若 f 是以 2π 为周期的可积或绝对可积函数，那么 $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 。

分段可微

f 定义在 $[a, b]$ 上，若存在 $[a, b]$ 的一个分割，使得 f 在分割出的区间对应的开区间中分别可微，则称 f 在 $[a, b]$ 上是分段可微的。

Fourier 收敛条件

若 f 以 2π 为周期，在 $[-\pi, \pi]$ 上分段可微，那么 f 的 Fourier 级数在 $\forall x_0$ 处收敛于 $\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$ 。

推论 f 在 $[-\pi, \pi]$ 有一阶导数 $\Rightarrow f$ 可展成 Fourier 级数。

正弦级数与余弦级数

定义在 $[-\pi, \pi]$ 上时

$$\mathbf{Th.}$$

(1) 当周期为 2π 的奇函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数时，其系数为

$$\begin{cases} a_n = 0, & (n = 0, 1, 2, \dots) \\ b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x, & (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

(2) 当周期为 2π 的偶函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数时，其系数为

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x, & (n = 0, 1, 2, \dots) \\ b_n = 0, & (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

$$\mathbf{Def.}$$

若 $f(x)$ 为奇函数，其傅里叶级数称为正弦级数。
若 $f(x)$ 为偶函数，其傅里叶级数称为余弦级数。

定义在 $[0, \pi]$ 上时

将其延拓。

奇延拓 $g(x) = -f(-x)$

偶延拓 $g(x) = f(-x)$

周期为 $2L$ 的傅里叶级数

变量置换 $\frac{\pi x}{L} = t$

$F(t) = f(\frac{Lt}{\pi})$

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L})$

13.2 Fourier 级数的逐点收敛

Dirichlet 积分

f 是以 2π 为周期的可积或绝对可积函数。

记 $S_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0)$

$$S_n(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos kx \cos kx_0 + \sin kx \sin kx_0) \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(x-x_0) \right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-x_0)}{2\sin\frac{x-x_0}{2}} \right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x_0) \left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} \right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(t+x_0) + f(x_0-t)) \left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} \right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(t+x_0) + f(x_0-t)) \left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} \right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(t+x_0) + f(x_0-t)) \left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} \right) \mathrm{d}x$$

狄利克雷积分、狄利克雷积分核

Riemann-Lebesgue 引理

$\mathbf{Th. 13.1:}$ (R-L 引理)

若 f 在 $[a, b]$ 上可积或绝对可积，那么：

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x \, dx = 0$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx = 0$$

Th. 13.2:

若 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上可导且 f' 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积或绝对可积，如果 $f(-\pi) = f(\pi)$ 那么：

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty$$

Th. 13.3:

若 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上有 $k+1$ 阶导数且 $f^{(k+1)}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积或绝对可积，如果 $f(-\pi) = f(\pi)$, $f'(-\pi) = f'(\pi)$, \dots , $f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi)$ 那么：

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), \quad n \rightarrow \infty$$

收敛定理

由 R-L 引理 Dirichlet 积分收敛。

傅里叶级数的局部化定理

f 是以 2π 为周期的可积或绝对可积函数，那么 f 的傅里叶级数在点 x_0 是否收敛以及收敛到何数值，仅与 f 在 x_0 附近的取值有关。

Dini 判别法

Th. 13.5:

若 f 以 2π 为周期，且在 $[-\pi, \pi]$ 上可积或绝对可积，对 $s \in \mathbb{R}$ 令：

$$\varphi(t) = f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2s,$$

若 $\exists \delta > 0$, $\text{s.t.} \int_0^\delta \frac{\varphi(t)}{t} dt$ 在 $[0, \delta]$ 上可积或绝对可积，那么 f 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛于 s

Th. 13.7:

若 f 以 2π 为周期，且在 $[-\pi, \pi]$ 上可积或绝对可积，若 f 在 x_0 处存在导数，或者有两个有限的单侧导数，那么其傅里叶级数在 x_0 处收敛于 $f(x_0)$ 。

Def. 13.2:

若 f 在 $U^o(x_0)$ 内有定义，若存在 $\delta > 0, L > 0, \alpha > 0$ 使得当 $t \in (0, \delta)$ 时有

$$|f(x_0+t) - f(x_0)| \leq Lt^\alpha,$$

$$|f(x_0-t) - f(x_0)| \leq Lt^\alpha,$$

则称 f 在 $U^o(x_0)$ 内满足 α 阶 Lipschitz 条件。

$\mathbf{Th. 13.6:}$

若 f 以 2π 为周期，且在 $[-\pi, \pi]$ 上可积或绝对可积，且 f 在 $U^o(x_0)$ 内满足 α 阶 Lipschitz 条件，那么 f 的傅里叶级数在 x_0 处收敛。

14 多元函数的极限与连续

14.1 Euclid 空间的点集及基本概念

n 维向量空间

集合 \mathbb{R}^n 定义了加法，数乘

Euclid 空间

定义

在向量空间 \mathbb{R}^n 上定义了内积的空间。

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

1. 半正定性 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$
2. 对称性 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$
3. 线性性 $\langle \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \mu \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$

Cauchy-Schwartz 不等式

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$$

范数

定义

$\mathbf{Def. 14.1.1:}$

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$$
 称向量 \boldsymbol{x} 的范数。

1. 正定性 $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$
2. 保数乘 $\|\lambda \boldsymbol{x}\| = |\lambda| \|\boldsymbol{x}\|$
3. 三角不等式 $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$

推论

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \leq \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\|$$

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 \leq (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2$$

夹角

$$\cos \theta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle}{\|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\|}$$

距离

\mathbb{R}^2 上定义 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 之间距离为 $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$

开球

$$\mathbf{Def. 14.1.2}$$

开球 $B_r(\boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < r\}$

点列收敛

$$\mathbf{Def. 14.1.3}$$

$$\{\boldsymbol{x}_k\} \subset \mathbb{R}^n$$

$\exists \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n, \forall \epsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}^*, \forall k > K, \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}\| < \epsilon$ 则称点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛于 \boldsymbol{a} 记为 $\lim_{k \rightarrow \infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a}$ 称 \boldsymbol{a} 为点列的极限。

若对每一分量都有 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{i,k} = a_i$ 称点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 按分量收敛于 \boldsymbol{a}

$$\mathbf{Th. 14.1.1}$$

点列收敛于 \boldsymbol{a} iff 点列按分量收敛于 \boldsymbol{a} .

柯西收敛定理

$$\mathbf{Def. \ 14.1.4} \quad \text{基本列}$$

基本一样，不记了

$$\mathbf{Th. \ 14.1.2} \quad \text{柯西收敛定理}$$

点列收敛 \iff 点列是基本列

开集与闭集

$$\mathbf{Def. \ 14.1.5} \quad \text{开集}$$

$E \subset \mathbb{R}^n$ 若 $\forall x \in E, \exists \epsilon > 0, \text{s.t. } B_\epsilon(x) \subset E$ 则称 E 为开集。

若一个集合的补集是开集，则该集合是闭集。

约定 \mathbb{R}^n 和 \emptyset 既是开集也是闭集。

$$\mathbf{Prop. \ 14.1.1}$$

有限多个开集的交仍是开集，任意多个开集的并仍是开集。

有限多个闭集的并仍是并集，任意多个闭集的交还是闭集。

内点、外点、边界点

$$\mathbf{Def. \ 14.1.6}$$

设 $E \subset \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$,

- $\exists B_\epsilon(x) \subset E \iff x$ 为 E 的内点
- $\exists B_\epsilon(x) \subset E^c \iff x$ 为 E 的外点
- $\forall B_\epsilon(x), \exists p, q \in B_\epsilon(x), \text{s.t. } p \in E, q \notin E \iff x$ 为 E 的边界点

内点的全体称为 E 的内部，记为 E°

边界点构成的集合称 E 的边界，记为 ∂E

聚点

$$\mathbf{Def. \ 14.1.7} \quad \text{聚点}$$

a 为聚点 $\iff E \subset \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^n$

\mathbb{R}^n , $\forall \epsilon > 0, \exists \boldsymbol{p} \in (B_{\epsilon}(\boldsymbol{a})) \cap E$

\boldsymbol{a} 为孤立点 $\iff \boldsymbol{a} \notin E$ 为聚点

导集、闭包

Def. 14.1.8

聚点全体称为导集，记为 E'

$\bar{E} = E \cup E'$ 称为 E 的闭包。

Th. 14.1.3

集合 E 是闭集 $\iff E' \subset E$

Th. 14.1.4

集合 E 是闭集 $\iff \forall \{ \boldsymbol{a}_n \} \subset E, (\lim_{n \rightarrow \infty} \boldsymbol{a}_n \in E \text{ 收敛时})$

Th. 14.1.5

集合 E 的导集与闭包均为闭集。

连续曲线、道路连通

Def. 14.1.9

设 E 是 \mathbb{R}^n 中的点集，若任给 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in E$ 存在 E 中的连续曲线将两者联结，称 E 是道路连通的。

连续映射 $\varphi = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

若所有的 $\varphi_i(t)$ 都连续，那么称 φ 是一个连续映射，它的像为一条连续曲线。

Def. 14.1.10

\mathbb{R}^n 中道路连通的开集称为（开）区域，区域的闭包称为闭区域。

14.2 Euclid 空间的基本定理

闭集套定理

Th. 14.2.1 (闭集套定理)

设 $\{E_k\}$ 是 \mathbb{R}^n 上的非空闭集序列，满足 $E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_k \supset E_{k+1} \supset \dots$ 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam } E_k = 0$ 则

$\mathop{\cap}\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ 中只有唯一的一点。

$\mathrm{diam} E = \sup\{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E\}$ 称 E 的直径。

列紧性定理 **Bolzano-Weierstrass**

Th. 14.2.2 (列紧性定理)

\mathbb{R}^n 上有界点列 $\{x_k\}$ 必有收敛子列。

紧致集

Def. 14.2.1 (紧致集)

设 S 为 \mathbb{R}^n 上点集，若 \mathbb{R}^n 中一组开集 $\{U_\alpha\}$ 满足 $\cup_\alpha U_\alpha \supset S$ 那么称 $\{U_\alpha\}$ 为 S 的一个开覆盖。

若 S 的任意一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 中总存在一个有限子覆盖覆盖 S 则称 S 为紧致集。

有限覆盖定理

Th. 14.2.3 (有限覆盖定理)

设 E 为 \mathbb{R}^n 中子集，则以下几条等价：

- E 为紧致集。
- E 中任何无穷点列均有收敛子列，且该子列极限仍在 E 中。
- E 为有界闭集。

14.3 多元函数的极限与连续

定义

Def. 14.3.1 (多元函数)

\mathbb{R}^n 的子集到 \mathbb{R}^m 的映射 f 称为 n 元函数，其中该子集是 f 的定义域 $\{x \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ 是 f 的值域。

$z = f(x)$ 或 $z = f(x_1, \dots, x_n)$

二元函数一般记作 $z = f(x, y)$

Def. 14.3.2 (重极限)

$D \subset \mathbb{R}^n$ $z = f(x)$ 是定义在 D 上的 n 元函

数 $a \in \mathbb{R}^n$ 是 D 的一个聚点 A 是一个实数。

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in B_\delta(a), |f(x) - A| < \epsilon$$

称 A 为 $f(x)$ 在 a 点的重极限。

海涅定理 Heine-Borel

Th. 14.3.1 (海涅定理)

$D \subset \mathbb{R}^n, z = f(x)$ 是定义在 D 上的 n 元函数，则

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \iff \forall \{x_k\} \subset D, x_k \neq a, x_k \rightarrow a, \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = A$$

累次极限

Def. 14.3.3 (累次极限)

$D \subset \mathbb{R}^n, z = f(x)$ 是定义在 D 上的二元函数，给定点 (x_0, y_0) 若对于每个固定的 $y \neq y_0$ 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ 存在，若极限 $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ 也存在，则称此极限为函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 先对 x 后对 y 的累次极限。

Th. 14.3.2

二元函数 $f(x, y)$ 在某点的重极限与两个累次极限均存在，则它们相等。

连续

Def. 14.3.3 (累次极限)

$D \subset \mathbb{R}^n, z = f(x)$ 是定义在 D 上的 n 元函数，给定点 $a \in D$ 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 则称函数 $f(x)$ 在 a 点连续。

我们约定 f 在 D 的孤立点也连续。

不连续的点称为间断点。

在定义域上每一点均连续，则称 f 在定义域上连续，或称 f 是定义域上的连续函数。

Example. 14.3.7

行列式函数 $\det: M_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数。(将 $M_{n \times n}$ 视为 \mathbb{R}^{n^2})

Example. 14.3.8

n 元多项式都是连续函数。

设 P, Q 为 n 元多项式

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x)Q(x) = P(a)Q(a),$$
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}, \quad (Q(a) \neq 0)$$

14.4 多元函数连续的性质

一致连续

Def. 14.4.1 (一致连续)

$D \subset \mathbb{R}^n$, $z = f(x)$ 是定义在 D 上的 n 元函数, 如果 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in D, \|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$ 则称函数 f 在 D 上一致连续。

连续映射

Def. 14.4.2

$D \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是 D 到 \mathbb{R}^m 的映射, 给定 $x_0 \in D$ 如果 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$ 则称映射 f 在点 x_0 连续。

连续映射类似定义。

可表示为:

$$\left(\begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{matrix} \right)$$

性质

Th. 14.4.1

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是连续映射 $\iff \forall f_i \in f$ 是

连续函数。

$$\mathbf{Th. 14.4.2}$$

$$\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$
 以下条件等价。

- \mathbf{f} 是连续映射
- 对 \mathbb{R}^n 上任意收敛点列 $x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$ 均有 $\mathbf{f}(x_n) \rightarrow \mathbf{f}(x_0) (n \rightarrow \infty)$
- 对任意开集 $E \subset \mathbb{R}^m$ $\mathbf{f}^{-1}(E)$ 是 \mathbb{R}^n 中开集

$$\mathbf{Th. 14.4.3}$$

连续映射将紧致集映射成紧致集。

$$\mathbf{Th. 14.4.4}$$

D 为 \mathbb{R}^n 中紧致集 f 是 D 上的连续函数，则下列结论成立

- (有界性) f 在 D 上有界。
- (最值性) f 在 D 上可以存在最大值和最小值。
- f 在 D 上一致连续。

$$\mathbf{Th. 14.4.6}$$

连续映射把道路连通集映射为道路连通集。

推论

(1) 连续函数将道路连通的紧致集映射成区间。(2) 连续函数将闭区域映射成闭区间。

$$\mathbf{Th. 14.4.7}$$

D 为 \mathbb{R}^n 中紧致集 f 是 D 上的连续函数，则 $\forall y \in \mathbb{R}^m, (\exists x_1, x_2 \in D, y \in [f(x_1), f(x_2)]) \iff \exists x \in D, \text{s.t. } y = f(x)$

15 多元函数微分学

15.1 全微分与偏导数

全微分

设开集 $D \in \mathbb{R}^n, f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 对 D 中给定的点 x_0 对于 D 中 x_0 附近的点 x 如果

$$f(x) - f(x_0) = \lambda_1 \Delta x_1 + \lambda_2 \Delta x_2 + \dots + \lambda_n \Delta x_n + o(\|\Delta x\|)$$

其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是常数 $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$

此时称函数 f 在 x_0 处可微。

线性主要部分称 f 在 x_0 处的全微分，有时也简称为微分。

偏导

$\mathbf{Def. 15.1.2}$

设开集 $D \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 对 D 中给定的点 $x_0 = (x_1, \dots, x_n)$ 极限

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i}$$

存在，则称 f 在 x_0 处关于第 i 个分量可偏导，称该极限为函数 f 在 x_0 处关于 x_i 的偏导数，记为 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ 或 $f_{x_i}(x_0)$

$$\mathrm{d}f(x_0) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) \mathrm{d}x_k$$

处处存在偏导：偏导函数

梯度

设开集 $D \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 对于 D 中给定的点 $x_0 = (x_1, \dots, x_n)$ 如果函数 f 在 x_0 处关于每个分量都可偏导，则称向量

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$
 为 f 在 x_0 的梯度，记为 $\mathrm{grad} f(x_0)$

方向导数

u 为给定的方向 $x_0 \in D$ 极限 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t u) - f(x_0)}{t}$ 称为 f 在 x_0 处沿方向 u 的方向导数，记作 $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0)$ 。

二元函数偏导

设 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内有定义，若 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$

$\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ 存在, 称此极限为函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数。

对 y 类似定义。

偏导函数类似定义。

几何意义:

对 x 偏导是曲面被平面 $y=y_0$ 截线在 M_0 处的切线 M_0T_x 对 x 轴的斜率。

对 y 类似。

二元函数全微分

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

可微条件

多元函数各偏导存在 $\not\Rightarrow$ 全微分存在

必要条件

在某点可微 \Rightarrow 在该点各偏导存在, 且全微分 $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$

充分条件

如果函数 $z=f(x, y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内存在, 且均在该点连续, 则该函数在该点可微。

各条件关系

各偏导连续 \Rightarrow 函数可微

函数可微 \Rightarrow 函数连续

函数可微 \Rightarrow 函数偏导存在

反例:

- $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$ 上半圆锥
- $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \end{cases}$

$$x^2+y^2=0\end{cases}$$

$$3. f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

f 在点 $\mathbf{x}_0=(x_1, \dots, x_n)$ 可微 \Rightarrow 则 f 在 \mathbf{x}_0 处沿任意方向 \mathbf{u} 的方向导数均存在, 且

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = f_{x_1}(\mathbf{x}_0)u_1 + \dots + f_{x_n}(\mathbf{x}_0)u_n$$

这里 (u_1, u_2, \dots, u_n) 是指向方向 \mathbf{u} 的单位向量。

15.2 多变量函数的求导

链式法则

多元函数套一元函数

$u=\phi(t), v=\psi(t)$ 都在 t 可导, 函数 $z=f(u, v)$ 在对应点 (u, v) 可微, 则复合函数 $z=f(\phi(t), \psi(t))$ 在对应点 t 可导, 其导数可用下列公式计算:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt}$$

多元函数套多元函数

$u=\phi(x, y), v=\psi(x, y)$ 都在 (x, y) 可微, 函数 $z=f(u, v)$ 在对应点 (u, v) 可微, 则复合函数 $z=f(\phi(x, y), \psi(x, y))$ 在对应点 (x, y) 可微, 其导数可用下列公式计算:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

函数 $f(u_1, \dots, u_m)$ 在对应点 (u_1, \dots, u_m) 可微, $u_k(x_1, \dots, x_n), k=1, 2, \dots, m$ 在 (x_1, \dots, x_n) 可微:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n$$

特殊例子

$$z = f(u, x, y), u = \phi(x, y)$$

$$z = f(\phi(x, y), x, y)$$

$$\text{令 } v = x, w = y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 1, \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}$$

注意区别 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 。

向量值函数的微分 □ Jacobian 矩阵

$$\mathbf{Def. 15.2.1}$$

设向量值函数 $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 点 $x_0 = (x_1, \dots, x_n) \in D$ 若存在 $m \times n$ 阶矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 使得

$$f(x) - f(x_0) = A \Delta x + o(\|\Delta x\|)$$

$$\lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \frac{\|o(\|\Delta x\|)\|}{\|\Delta x\|} = 0$$

则称 f 在 x_0 处可微，并称 $A \Delta x$ 为 f 在 x_0 处的微分，记作 $df(x_0) = A dx$ 。

$$df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} dx$$

称为向量值函数 f 在点 x_0 的 Jacobian 矩阵。

映射微分中的 $m \times n$ 阶矩阵就是其 Jacobian 矩阵，因此

$$df(x_0) = J_f(x_0) dx$$

复合映射的微分

设开集 $E \subset \mathbb{R}^l, D \subset \mathbb{R}^m$ 映射 $g: E \rightarrow D, f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ 记复合映射为 $h = f \circ g: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ 。

如果 g 在 $u_0 \in E$ 处可微, f 在 $x_0 = g(u_0) \in D$ 处可微, 则复合映射 h 在 u_0 处可微, 且有 $h'(u_0) = f'(g(u_0))g'(u_0)$

全微分形式不变性 (一阶)

$$z = f(u, v)$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

u, v 可为自变量或中间变量。

15.3 多元函数泰勒公式

高阶偏导

$z = f(x, y)$ 的二阶偏导为

(纯偏导)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y)$$

(混合偏导)

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x, y)$$

混合偏导相等条件

若函数 $z = f(x, y)$ 的两个二阶混合偏导数 f_{xy}, f_{yx} 在区域 D 内连续, 那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等。

凸区域

设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是区域。若联结 D 中任意两点的线段都完全属于 D (即对于任意两点 $x_0, x_1 \in D, \forall \lambda \in [0, 1]$ 有 $x_0 + \lambda(x_1 - x_0) \in D$) 则称 D 为凸区域。

中值定理

二元函数 $f(x, y)$ 在凸区域 D 上可微, 则

对于 D 内任意两点 (x_0, y_0) 和 $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ 至少存在一个 $\theta \in (0, 1)$ 使得

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \Delta x + f_y(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \Delta y$$

多元:

设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是凸区域 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 可微, 任给 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in D$ 存在 $\boldsymbol{\xi} \in D$ 使得:

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = Jf(\boldsymbol{\xi})(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$
$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{a} + \theta(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \theta \in (0, 1)$$

泰勒公式

二元函数

$\mathbf{Th. 15.3.2}$

设函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的邻域 U 上具有 $k+1$ 阶连续偏导数, 那么对于 U 内每一点 $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ 都有

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + (\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}) f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} (\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0, y_0) + \dots + \frac{1}{k!} (\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y})^k f(x_0, y_0) + R_k$$

$R_k = \frac{1}{(k+1)!} (\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y})^{k+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y), \theta \in (0, 1)$ 称为 Lagrange 余项。

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} (\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y})^i f(x_0, y_0) + R_k$$

我觉得这东西其实就是一个算子 ...

只不过这东西要根据 Leibniz 公式来计算

好像说了些废话 ..

多元函数

$\mathbf{Th. 15.3.3}$

设函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在点 (x_1^0, \dots, x_n^0) 附近具有 $k+1$ 阶连续偏导数, 那么该点附近有

$$f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_n^0 + \Delta x_n) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + \sum_{i=1}^n \Delta x_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + \dots + \frac{1}{k!} (\sum_{i=1}^n \Delta x_i \frac{\partial}{\partial x_i})^k f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + R_k$$

$$R_k = \frac{1}{(k+1)!} (\sum_{i=1}^n \Delta x_i \frac{\partial}{\partial x_i})^{k+1} f(x_1^0 + \theta \Delta x_1, x_2^0 + \theta \Delta x_2, \dots, x_n^0 + \theta \Delta x_n), \quad \theta \in (0, 1)$$

称 Lagrange 余项。

多重指标及指标记号的泰勒公式

称 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 为一个多重指标, 记 $|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ $|\boldsymbol{\alpha}|! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$

对 $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ 记 $\boldsymbol{x}^{|\boldsymbol{\alpha}|} = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$

则 $(x_1 + \dots + x_n)^k = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=k} \frac{k!}{\boldsymbol{\alpha}!} \boldsymbol{x}^{|\boldsymbol{\alpha}|}$

使用多重指标 $\boldsymbol{\alpha}$ 的高阶偏导数

$$\boldsymbol{D}^{|\boldsymbol{\alpha}|} f(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(\boldsymbol{x})$$

$\mathbf{Th. 15.3.4}$

$D \subset \mathbb{R}^n$ 是凸区域 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 具有 $m+1$ 阶连续偏导数, 存在 $\theta \in (0, 1)$ 使得

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} (\sum_{i=1}^n \Delta x_i \frac{\partial}{\partial x_i})^k f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{(m+1)!} (\sum_{i=1}^n \Delta x_i \frac{\partial}{\partial x_i})^{m+1} f(\boldsymbol{x}_0 + \theta \Delta \boldsymbol{x})$$

$$R_m = \frac{1}{(m+1)!} (\sum_{i=1}^n \Delta x_i \frac{\partial}{\partial x_i})^{m+1} f(\boldsymbol{x}_0 + \theta \Delta \boldsymbol{x})$$

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{J}f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^T \boldsymbol{H}f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \dots$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \left| \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{n \times n}$$

其中二次项矩阵一般记作 $Hess(f) = \left(\frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{n \times n}$ 称为 f 在 \mathbf{a} 处的 Hessian 矩阵。

15.4 隐函数定理

隐函数存在唯一性定理

若函数 $F(x, y)$ 满足下列条件：

1. 函数 F 在以 $P_0(x_0, y_0)$ 为内点的某一区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上连续
2. $F(x_0, y_0) = 0$
3. 在 D 内存在连续的偏导数 $F_y(x, y)$
4. $F_y(x_0, y_0) \neq 0$

则在 P_0 的某邻域 $U(P_0) \subset D$ 内，方程 $F(x, y) = 0$ 唯一确定了一个定义在某区间 $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ 内的函数 $y = f(x)$ 使得

1. $f(x_0) = y_0$, $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ 时 $(x, f(x)) \in U(P_0)$ 且 $F(x, f(x)) \equiv 0$
2. $f(x)$ 在 $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ 内连续。

隐函数可微性定理

若函数 $F(x, y)$ 满足隐函数存在唯一性定理的 4 个条件，再加上 $F_x(x, y)$ 在 D 内存在且连续，则由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数 $y = f(x)$ 在 $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ 内有连续的导函数，且 $f'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$

二元隐函数唯一存在与连续可微性定理

若函数 $F(x, y)$ 满足下列条件：

1. 函数 F 在以 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为内点的某一区域 $D \subset \mathbb{R}^3$ 上连续
2. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$
3. 在 D 内存在连续的偏导数 F_x, F_y, F_z
4. $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

则在 P_0 的某邻域 $U(P_0) \subset D$ 内，方程 $F(x, y, z) = 0$ 唯一确定了一个定义在某区间 $U((x_0, y_0)) \subset \mathbb{R}^2$ 内的连续函数 $z = f(x, y)$ 使得

1. $f(x_0, y_0) = z_0$, $(x, y) \in U((x_0, y_0))$ 时 $(x, y, f(x, y)) \in U(P_0)$ 且 $F(x, y, f(x, y)) \equiv 0$
2. $z = f(x, y)$ 在 $U((x_0, y_0))$ 有连续的偏导数，且 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial x}{\partial z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial y}{\partial z}$

隐函数组定理

定义 $\frac{\partial (F, G)}{\partial (u, v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} \neq 0$

若：

1. 函数 $F(x, y, u, v), G(x, y, u, v)$ 在以 $P_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$ 为内点的某一区域 $V \subset \mathbb{R}^4$ 上连续
2. $F(x_0, y_0, u_0, v_0) = G(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$
3. 在 V 内 F, G 存在一阶连续偏导数
4. $\frac{\partial (F, G)}{\partial (u, v)} \Big|_{P_0} \neq 0$

则在 P_0 的某邻域 $U(P_0) \subset V$ 内，方程 $F(x, y, u, v) = G(x, y, u, v) = 0$ 唯一确定了一个定义在某区间 $U((x_0, y_0)) \subset \mathbb{R}^2$ 内的两个隐函数 $u=f(x, y), v=g(x, y)$ 使得

1. $f(x_0, y_0) = u_0, g(x_0, y_0) = v_0$ 且当 $(x, y) \in U((x_0, y_0))$ 时 $(x, y, f(x, y), g(x, y)) \in U(P_0)$ 且 $F(x, y, f(x, y), g(x, y)) \equiv 0 \equiv G(x, y, f(x, y), g(x, y))$
2. $u=f(x, y), v=g(x, y)$ 在 $U((x_0, y_0))$ 内连续。
3. u, v 在 $U((x_0, y_0))$ 内有一阶连续偏导，且

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial (F, G)}{\partial (x, v)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial (F, G)}{\partial (u, x)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial (F, G)}{\partial (y, v)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial (F, G)}{\partial (u, y)}$$

15.5 隐函数定理的几何应用

平面曲线的切线与法线

$$F(x, y) = 0$$

$$\text{切线} \quad y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\text{法线} \quad y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

$$\text{切线} \quad F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

$$\text{法线} \quad F_y(x_0, y_0)(x - x_0) - F_x(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

空间曲线的切线与法平面

$$\text{切线} \quad \frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}$$

$$\text{法平面} \quad x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$$

切线：

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}\right|_{M_0}} = \frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}\right|_{M_0}} = \frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}\right|_{M_0}}$$

法平面：

$$(x-x_0)\left.\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}\right|_{M_0} + (y-y_0)\left.\frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}\right|_{M_0} + (z-z_0)\left.\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}\right|_{M_0} = 0$$

曲面的切平面与法线

$$F(x, y, z) = 0$$

切平面：

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0) = 0$$

法线：

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z-z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

15.6 多元函数的极值问题

矩阵的正定性

定义

$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 都有

$\mathbf{x}'A\mathbf{x} > 0$ 则称 A 为正定矩阵。

$\mathbf{x}'A\mathbf{x} \geq 0$ 则称 A 为半正定矩阵。

$\mathbf{x}'A\mathbf{x} < 0$ 则称 A 为负定矩阵。

$\mathbf{x}'A\mathbf{x} \leq 0$ 则称 A 为半负定矩阵。

否则属于不定矩阵。

判定

A 正定 \iff 所有顺序主子式大于 0

A 正定 \iff 所有特征值大于 0

$A \neq 0 \iff a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$.

二元函数的 Hessian 矩阵

函数 $f(x, y)$ 在 P_0 的邻域内有一二阶连续偏导，记 $A=f_{xx}(x_0, y_0)$, $B=f_{xy}(x_0, y_0)$, $C=f_{yy}(x_0, y_0)$ 并记 $H_f(P_0)=\begin{matrix} A & B \\ B & C \end{matrix}$ 称为 Hessian 矩阵。

二元函数极值定义

$z=f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 的某邻域内有定义，对邻域内的任一点 (x, y)

均有 $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ 则称函数在 (x_0, y_0) 有极大值。均有 $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ 则称函数在 (x_0, y_0) 有极小值。

二元函数取得极值的条件

必要条件

$z=f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 有偏导，且在点 (x_0, y_0) 有极值，则它在该点的偏导数必为零。

稳定点充分条件

$z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的邻域内有一二阶连续偏导，且 P_0 是 f 的稳定点。

$H_f(P_0)$ 正定时 f 在 P_0 取极小值

$H_f(P_0)$ 负定时 f 在 P_0 取极大值

$H_f(P_0)$ 不定时 f 在 P_0 不取极值

判定条件

记 $A=f_{xx}(x_0, y_0)$, $B=f_{xy}(x_0, y_0)$, $C=f_{yy}(x_0, y_0)$

$AC-B^2 > 0 \implies$

$a < 0 \implies$ 极大值, $a > 0 \implies$ 极小值

$AC-B^2 < 0 \implies$ 无极值

多元函数

一阶偏导均为零，存在二阶连续偏导。

Hessian 矩阵正定：极小

Hessian 矩阵负定：极大

15.7 条件极值

拉格朗日乘数法

求 $z=f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y)=0$ 下的可能极值点：

先构造函数 $L(x, y, \lambda) = f(x, y)+\lambda\varphi(x, y)=0$ 再由

$$\begin{cases} L_x=f_x(x, y)+\lambda\varphi_x(x, y)=0 \\ L_y=f_y(x, y)+\lambda\varphi_y(x, y)=0 \\ L_\lambda=\varphi(x, y)=0 \end{cases}$$

解出 x, y, λ 其中 x, y 就是可能的极值点的坐标。

一般形式拉格朗日乘数法

条件组 $\varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n)=0, k=1, 2, \dots, m(m<n)$ 的限制下，求 $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的极值。

其拉格朗日函数是 $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)+\sum_{k=1}^m \lambda_k \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$

设 f 与 φ_k 均在 D 内有连续的一阶偏导，若 $P_0(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in D$ 是上述问题的极值点，且 Jacobian 矩阵

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

行满秩，则存在 m 个常数 $\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)}$ 使得 $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)})$ 为上述拉格朗日函数的稳定点。

判定条件

1. 消去限定条件，得到函数，求此函数 Hessian 矩阵，判断其正定性。
2. $H_L(P_0)=\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial x_k}\right)_{P_0}$
 1. $H_L(P_0)$ 正定，取条件极小值
 2. $H_L(P_0)$ 负定，取条件极大值
 3. 证明：泰勒
3. 确有极值，仅有一个稳定点，在定义域的边界上不取/趋极值，则稳定点就是条件极值点。

16 重积分

16.1 二重积分的定义与基本性质

区域的面积

有界区域 $P \subset \mathbb{R}^2$ 用直线网 T 将其分割。

选取方式：

- Δ_i 上的点均为 P 的内点
- Δ_i 上至少有一点为 P 的内点，且 P 的任意边界点均含于某 Δ_i

第一类面积 $s_P(T)$

第二类面积 $S_P(T) \geq s_P(T)$

数集 $\{s_P(T)\}$ 有上确界 $\{S_P(T)\}$ 有下确界。

记 $\underline{I}_P = \sup \{s_P(T)\}$, $\overline{I}_P = \inf \{S_P(T)\}$
易见 $0 \leq \underline{I}_P \leq \overline{I}_P$

称 \underline{I}_P 为 P 的内面积 \overline{I}_P 为 P 的外面积。

若 $\underline{I}_P = \overline{I}_P$ 则称 P 为可求面积的图形，将其共同值作为 P 的面积。

P 可求面积 $\iff \forall \epsilon > 0, \exists T, \text{s.t.}; S_P(T) - s_P(T) < \epsilon$

二重积分

$$\iint_D f(x, y) \mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta \sigma_i$$

直角坐标系下可写为：

$$\iint_D f(x, y) \mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

二重积分的存在性

$$\mathbf{Th. 16.2.1}$$

$f(x, y)$ 在 D 上可积，则 $f(x, y)$ 在 D 上有界。

$$\mathbf{Th. 16.2.2}$$

$f(x, y)$ 在 D 上可积 $\iff \lim_{|T| \rightarrow 0} S(T) = \lim_{|T| \rightarrow 0} s(T)$

$\mathbf{Th.}; 16.2.3$

$f(x, y)$ 在 D 上可积 $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists T, \text{s.t.}; S(t) - s(T) < \varepsilon$

$\mathbf{Th.}; 16.2.4$

有界闭域上的连续函数必可积。

$\mathbf{Th.}; 16.2.5$

$f(x, y)$ 是定义在有界闭域上的有界函数，若其不连续点都落在有限条光滑曲线上，则 $f(x, y)$ 在该有界闭域内可积。

二重积分性质

保数乘

$\iint_D k f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = k \iint_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$

保加

$\iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)] \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \iint_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \pm \iint_D g(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$

区域可加性

$\iint_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \iint_{D_1} f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y + \iint_{D_2} f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$

$(D = D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 = \varnothing)$

常数函数

面积 $\sigma = \iint_D 1 \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \iint_D \mathrm{d}x \mathrm{d}y$

保序性

在 D 上 $f(x, y) \leq g(x, y)$ 则有

$\iint_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \leq \iint_D g(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$

特别地 $\left| \iint_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \right| \leq$

$$\iint\limits_D \left|f(x,y)\right| \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

估值不等式

在闭区域 D 上 $m \leq f(x, y) \leq M$ ， σ 为 D 的面积，则有

$$m \sigma \leq \iint\limits_D f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \leq M \sigma$$

二重积分中值定理

在闭区域 D 上 $f(x, y)$ 连续， σ 为 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ, η) 使得

$$\iint\limits_D f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \sigma f(\xi, \eta)$$

16.2 二重积分的计算

矩形区域上二重积分计算

累次积分

$D=[a, b] \times [c, d]$; $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 若对 $\forall x \in [a, b]$ $f(x, y)$ 在 $[c, d]$ 上可积，那么可得 $I(x) = \int_c^d f(x, y) \mathrm{d}y$; $x \in [a, b]$ 若 $I(x)$ 也在 $[a, b]$ 上可积，则得积分

$\int_a^b I(x) \mathrm{d}x$ 称为累次积分。记为 $\int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x, y) \mathrm{d}y$

存在条件

$D=[a, b] \times [c, d]$; $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 在 D 上可积，且对 $\forall x \in [a, b]$ $\int_c^d f(x, y) \mathrm{d}y$ 都存在，则累次积分存在，且

$$\iint\limits_D f(x, y) \mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x, y) \mathrm{d}y$$

$D=[a, b] \times [c, d]$; $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 在 D 上可积，且对 $\forall y \in [c, d]$ $\int_a^b f(x, y) \mathrm{d}x$ 都存在，则累次积分存在，且

$$\iint\limits_D f(x, y) \mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x, y) \mathrm{d}x$$

f 在 $D=[a, b] \times [c, d]$ 上连续，则有

$$\iint\limits_D f(x, y) \mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x, y) \mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x, y) \mathrm{d}y$$

一般区域上二重积分计算

x 型区域 $D = \{(x, y) \mid y_1(x) \leq y \leq y_2(x), a \leq x \leq b\}$

y 型区域 $D = \{(x, y) \mid x_1(y) \leq x \leq x_2(y), c \leq y \leq d\}$

一般将一般区域分解成有限个无公共内点的 x 或 y 型区域处理。

存在定理

$f(x, y)$ 在 x 型区域 D 上连续, $y_1(x), y_2(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则

$$\iint_D f(x, y) \mathrm{d}\sigma = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$

$f(x, y)$ 在 y 型区域 D 上连续, $x_1(y), x_2(y)$ 在 $[c, d]$ 上连续, 则

$$\iint_D f(x, y) \mathrm{d}\sigma = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

二重积分的变量变换

简化被积函数

简化积分域 (优先)

变量变换公式

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} x & y \\ u & v \end{vmatrix}$$

$f(x, y)$ 在有界闭域 D 上可积, 若变换 $T: x=x(u, v), y=y(u, v)$ 将 uv 平面上按段光滑封闭曲线所围的区域 Δ 一对一的映成 xy 平面上的闭区域 D , 函数 $x(u, v), y(u, v)$ 在 Δ 内分别具有一阶连续偏导数, 且 $J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0, \forall (u, v) \in \Delta$ 则

$$\iint_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \iint_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v)) |\mathbf{J}(u, v)| \mathrm{d}u \mathrm{d}v$$

面积变化率 $J = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$

在 Δ 内个别点上或在一条曲线上为零公式仍成立。

极坐标换元

含有 $x^2 + y^2$ 或边界表达式有该项, 常用极坐标变换。

$$\iint_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \iint_{\Delta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta$$

广义极坐标变换

$$\iint_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \iint_{\Delta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta$$

16.3 三重积分

定义

$f(x, y, z)$ 是定义在三维空间可求体积的有界闭区域 V 上的函数 A 是某确定常数, 若

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ s.t. }; \forall T, |T| < \delta \Rightarrow \left| \sum_{(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in V_i} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i - A \right| < \epsilon$$

则称 $f(x, y, z)$ 在 V 上可积 A 称为 f 在 V 上的三重积分, 记为

$$A = \iiint_V f(x, y, z) \mathrm{d}V$$

或

$$A = \iiint_V f(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

三重积分的计算

$f(x, y, z)$ 在 $V = [a, b] \times [c, d] \times [e, h]$ 上的三重积分存在, 且对任何 $(x, y) \in D, D = [a, b] \times [c, d]$ 二重积分 $F(y, z) = \int_a^b f(x, y, z) \mathrm{d}x$ 存在, 则 $\iint_D \int_a^b f(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$ 存在, 且

$$\iiint_V f(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z = \iint_D \int_a^b f(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

$f(x, y, z)$ 在 $V = [a, b] \times [c, d] \times [e, h]$ 上的三重积分存在, 且对任何 $z \in [e, h]$ 二重积分 $I(z) = \iint_D f(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$ 存在 $D = [a, b] \times [c, d]$ 则 $\int_e^h \int_a^b \int_c^d f(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$ 存在, 且

$$\iiint_V f(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z = \int_e^h \int_a^b \int_c^d f(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

$$\iiint_V f(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z = \int_a^b \int_c^d \int_e^h f(x, y, z) \mathrm{d}z \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$

例

$$\mathbf{Prove:} \int_0^x \dots$$

$$\int_0^v \int_0^u \int_0^u f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 f(t) dt$$

Proof:

$$\begin{aligned} \int_0^v \int_0^u \int_0^u f(t) dt &= \int_0^v \int_0^u \int_0^t f(t) dt dv \\ \int_0^v \int_0^u \int_0^u f(t) dt &= \int_0^v \int_0^x \int_0^v (v-t) f(t) dt dv \\ &= \int_0^x \int_0^t \int_0^x (v-t) f(t) dt dv \\ &= \int_0^x \int_0^t \left[\frac{1}{2} (v-t)^2 f(t) \right]_v=x dt = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 f(t) dt \end{aligned}$$

三重积分的换元

变量变换公式

$f(x, y, z)$ 在有界闭区域 V 上可积，若变换 $T: x=x(u, v, w), y=y(u, v, w), z=z(u, v, w)$ 将 uvw 空间中的区域 V' 一对一的映成 xyz 空间中的区域 V 函数 $x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)$ 及它们的一阶偏导在 V' 内连续，且函数的行列式 $J(u, v, w) = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \neq 0, (u, v, w) \in V'$ 则

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J(u, v, w)| du dv dw$$

柱面坐标变换

$$\begin{cases} x=r\cos \theta, \\ y=r\sin \theta, \\ z=z. \end{cases}$$

Jacobian 行列式 :

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(r\cos \theta, r\sin \theta, z) r dr d\theta dz$$

球坐标变换

$$\begin{cases} x=r\sin \varphi \cos \theta, \\ y=r\sin \varphi \sin \theta, \\ z=r\cos \varphi. \end{cases}$$

Jacobian 行列式 :

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi \cos \theta & -r\sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi \sin \theta & r\sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \varphi$$

广义球坐标变换

球坐标变换

$$\begin{cases} x=ar\sin\varphi\cos\theta, \\ y=br\sin\varphi\sin\theta, \\ z=cr\cos\varphi. \end{cases}$$

Jacobian 行列式 :

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} = abcr^2 \sin\varphi$$

16.4 重积分应用

曲面方程

显式

$$z=z(x, y), (x, y) \in D$$

隐式

$$F(x, y, z)=0, (x, y, z) \in V$$

通常假设 F, F_x, F_y, F_z 在 V 上连续。

曲面在点的法向量的各分量即为偏导。

参数方程

设 Δ 是 uv 平面上的一个区域, 则称

$$\Sigma: \vec{r} = \vec{r}(u, v), (u, v) \in \Delta$$

为曲面的向量方程, 其中 $\vec{r}(u, v) \in \mathbb{R}^3$

如记 $\vec{r} = (x, y, z)$ 则 (1) 又可表示成

$$\begin{cases} x=x(u, v) \\ y=y(u, v) \\ z=z(u, v) \end{cases}, \quad (u, v) \in \Delta$$

称此为曲面的参数方程。

曲面面积

方程 $z=f(x, y), (x, y) \in D$ 其中 D 是可求面积的平面有界区域, $f(x, y)$ 在 D 上有连续的一阶偏

导。

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

方程 $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$; $(u, v) \in D$ 可求面积 x, y, z 在 D 上有一阶连续偏导 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$ 中至少一个不为零, 则曲面 S 的面积为

$$\Delta S = \iint\limits_D \sqrt{EG-F^2} \mathrm{d}u \mathrm{d}v$$

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$$

$$F = x_{uv} + y_{uv} + z_{uv}$$

$$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$$

(第一基本量???)

重心

平面区域

$$\bar{x} = \frac{\iint\limits_D x \rho(x, y) \mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \rho(x, y) \mathrm{d}\sigma}, \bar{y} = \frac{\iint\limits_D y \rho(x, y) \mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \rho(x, y) \mathrm{d}\sigma}$$

空间区域

$$\bar{x} = \frac{\iiint\limits_V x \rho(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z}{\iiint\limits_V \rho(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z}, \bar{y} = \frac{\iiint\limits_V y \rho(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z}{\iiint\limits_V \rho(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z}, \bar{z} = \frac{\iiint\limits_V z \rho(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z}{\iiint\limits_V \rho(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z}$$

转动惯量

$$J = \iiint\limits_V r^2(x, y, z) \rho(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

引力

质点 $A(x_i, y_i, z_i)$

$$F = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$F_x = k \iiint\limits_V \frac{(x-x_i)^2}{r^3} \rho(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

$$F_y = k \iiint\limits_V \frac{(y-y_i)^2}{r^3} \rho(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

$$F_z = k \iiint\limits_V \frac{(z-z_i)^2}{r^3} \rho(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

$$r = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}$$

17 曲线积分

17.1 第一型曲线积分

定义

L 为可求长的曲线弧，函数 $f(x, y)$ 在 L 上有界，用 L 上的点将 L 分割，若极限

$$\lim_{\max \Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i = A$$

且 A 为有限数，取值与分割及取样点的选取无关，则称 $f(x, y)$ 在 L 上可积，称 A 为函数 $f(x, y)$ 在曲线弧 L 上对弧长的曲线积分，或第一型曲线积分，记作

$$\int_L f(x, y) \mathrm{d}s$$

类似地，三维空间上有：

$$\int_L f(x, y, z) \mathrm{d}s$$

存在条件

$f(x, y)$ 在光滑曲线弧 L 上连续时，第一型曲线积分 $\int_L f(x, y) \mathrm{d}s$ 存在。

性质

线性性

$$\int_L \sum c_i f_i \mathrm{d}s = \sum c_i \int_L f_i \mathrm{d}s$$

路径可加

$$\int_L f \mathrm{d}s = \sum \int_{L_i} f \mathrm{d}s$$

约定

L 为闭曲线时，函数 $f(x, y)$ 在 L 上的第一型曲线积分记为

$$\oint f(x, y) \mathrm{d}s$$

计算

设光滑曲线 $L: \begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} t \in [\alpha, \beta]$ 上 $f(x, y)$ 在 L 上有定义且连续, 则:

$$\int_L f(x, y) \mathrm{d}s = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} \mathrm{d}t$$

17.2 第二型曲线积分

定义

L 为平面内从点 A 到 B 的一条可求长的曲线弧, 函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 L 上有定义, 对 L 的任一分割 T 设小段弧长为 Δs_i 分割的细度 $|\mathcal{T}| = \max\{\Delta s_i\}$ 任取 $(\xi_i, \eta_i) \in \overline{M_{i-1}M_i}$ 若极限

$$\lim_{|\mathcal{T}| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + \lim_{|\mathcal{T}| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i$$

存在, 且与分割 T 及 (ξ_i, η_i) 的取法无关, 称此极限为 $P(x, y), Q(x, y)$ 沿有向曲线 L 上的第二型曲线积分, 记为:

$$\int_L P(x, y) \mathrm{d}x + Q(x, y) \mathrm{d}y$$

或

$$\int_{AB} P(x, y) \mathrm{d}x + Q(x, y) \mathrm{d}y$$

或

$$\int_L P(x, y) \mathrm{d}x + \int_L Q(x, y) \mathrm{d}y$$

简记为

$$\int_L P \mathrm{d}x + Q \mathrm{d}y$$

如果 L 是封闭的有向曲线, 则记为

$$\oint_L P \mathrm{d}x + Q \mathrm{d}y$$

设 $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$, $\mathrm{d}\vec{s} = \mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j}$

则又可记为

$$\int_L \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

存在条件

P, Q 在有向光滑曲线弧 L 上连续时, 第二类曲线积分存在。

推广

$$\int_{\Gamma} P \mathrm{d}x + Q \mathrm{d}y + R \mathrm{d}z$$

性质

线性性

$$\int_L \left(\sum c_i P_i \right) \mathrm{d}x + \left(\sum c_i Q_i \right) \mathrm{d}y = \sum c_i \left(\int_L P_i \mathrm{d}x + \int_L Q_i \mathrm{d}y \right)$$

曲线段可加性

$$\int_L P \mathrm{d}x + Q \mathrm{d}y = \sum \int_{L_i} P \mathrm{d}x + Q \mathrm{d}y$$

有向性

$$\int_{-L} P \mathrm{d}x + Q \mathrm{d}y = - \int_L P \mathrm{d}x + Q \mathrm{d}y$$

计算

设光滑曲线 $L: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}; t \in [\alpha, \beta]$ 参数 t 单调地由 α 变到 β 时, 点 $M(x, y)$ 从 A 变到 B , φ, ψ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有一阶连续导数 $f(x, y)$ 在 L 上有定义且连续, 则第二型曲线积分 $\int_L P \mathrm{d}x + Q \mathrm{d}y$ 存在, 且

$$\int_L P \mathrm{d}x + Q \mathrm{d}y = \int_{\alpha}^{\beta} \left(P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \right) \mathrm{d}t$$

联系

$$\int_L P \mathrm{d}x + Q \mathrm{d}y = \int_L (P \cos \alpha + Q \sin \alpha) \mathrm{d}s$$

注意

被积函数相同, 起终点相同, 但是路径不同积分结果不一定相同。

17.3 格林公式

17.3.1 平面区域的分类与边界的定向

若 D 内任一闭曲线所围成的部分都属于 D 则称 D 为平面单连通区域；否则称为复连通区域。
(亏格?)

D 的边界曲线的正方向：人沿边界行走时，区域 D 总在他的左手边。

(逆时针?)

17.3.2 Green 公式

定理

设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成，函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导，则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_L P dx + Q dy$$

其中 L 是 D 的取正方向的边界曲线。

证明：分块

即证：

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_L Q dy \quad (\text{Y型区域上})$$

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_L P dx \quad (\text{X型区域上})$$

意义

建立了二重积分和曲线积分的一种等式关系

揭示了函数在区域内部与边界间的内在联系

另一种记法：

$$\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} P + \frac{\partial}{\partial y} Q \right) dx dy = \int_L P dx + Q dy$$

17.3.3 应用

若 L 是非封闭曲线，则先补再用。

若 L 所围闭域为 D 有奇点则挖掉再用。

17.3.4 曲线积分与路径无关的条件

定义

D 是一个区域, P, Q 在 D 内有一阶连续偏导, 如果对 D 内任意给定的两点 A, B 以及 D 内从 A 到 B 的任意两条曲线 L_1, L_2 都有 $\int_{L_1} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L_2} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 则称曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在 D 内与路径无关。

条件

D 是单连通闭区域, 若 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 在 D 内有一阶连续偏导, 则下列四个条件等价:

1. 沿 D 内任一按段光滑封闭曲线 L 有 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$
2. 在 D 内 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关。
3. 在 D 内存在 $u(x, y)$ 使得 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$
4. 在 D 内, $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

全微分方程

若存在 $u(x, y)$ 使得 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 则称 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$ 为全微分方程。

当 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 在单连通区域 D 内有一阶连续偏导时,

全微分方程合法 $\iff \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

18 曲面积分

18.1 第一型曲面积分

表示

1. 显式 $z=z(x, y), (x, y)\in D$
2. 隐式 $F(x, y, z)=0, (x, y, z)\in V$ (通常假设 F, F_x, F_y, F_z 在 V 上连续)
3. 参数 $\mathit{\Sigma}: \vec{r}=\vec{r}(u, v), (u, v)\in \Delta \subset \mathbb{R}^2$ 或:

$\begin{cases} x=x(u, v), \\ y=y(u, v), \\ z=z(u, v), \end{cases} \quad (u, v)\in \Delta.$

面积

$$z=f(x, y), \quad S = \iint\limits_{D} \sqrt{1+f_x^2+f_y^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

参数方程：

$$\begin{cases} x=x(u, v), \\ y=y(u, v), \\ z=z(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in D.$$

x, y, z 在有界区域 D 上有连续一阶偏导，且 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}$ 中至少一个不为零，则曲面 S 的面积为

$$\Delta S = \iint\limits_{D} \sqrt{EG-F^2} \mathrm{d}u \mathrm{d}v, \quad E=x_u^2+y_u^2+z_u^2, F=x_u x_v+y_u y_v+z_u z_v, G=x_v^2+y_v^2+z_v^2.$$

$\sqrt{EG-F^2}$ 称曲面的第一基本量

定义

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z) \mathrm{d}S = \lim\limits_{|T| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

计算

Σ 是正则曲面，参数方程为 $\vec{r}=\vec{v}(u, v), (u, v) \in \Delta$

函数 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上连续，则有

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z) \mathrm{d}S = \iint\limits_{\Delta} f(\vec{r}) \left| \vec{r}_u \times \vec{r}_v \right| \mathrm{d}u \mathrm{d}v$$

$z=g(x, y), f$ 在 Σ 上连续，

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z) \mathrm{d}S = \iint\limits_{\Delta} f(x, y, z) \sqrt{1+g_x^2+g_y^2} \mathrm{d}u \mathrm{d}v$$

18.2 第二型曲面积分

曲面法向量的指向决定曲面的侧。

单位时间流量元 $\Delta \Phi = \vec{v} \cdot \vec{n} \Delta A$

速度 \vec{v}

法向量 \vec{n}

定义

$$\iint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_S Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint\limits_S R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^n P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\varDelta S_{i_{yz}}+\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^n Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\varDelta S_{i_{zx}}+\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^n R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\varDelta S_{i_{xy}} \quad \text{\$}$$

计算

$$S\text{ : }x=x(y, z),$$

$$\iint\limits_S P(x, y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

两类积分联系

$$z=z(x, y), (x, y)\in D$$

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}.$$

$$\iint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

参数方程处理

$$\vec{r}=\vec{r}(u, v), (u, v)\in \Delta$$

$$\vec{F}=(P, Q, R) \text{ 在 } S \text{ 上连续}$$

$$\iint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Delta} \vec{F}\circ\vec{r}\cdot(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

18.3 Gauss 公式与 Stokes 公式

Gauss 公式

空间闭区域 V 由分片光滑的双侧封闭曲面 S 围成，函数 P, Q, R 在 V 上连续，且具有一阶连续偏导，则

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V = \iint\limits_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$\iint_S (R \frac{\partial z}{\partial x} + Q \frac{\partial z}{\partial y} + P) \, dS$$

其中 S 取外侧。此式称高斯公式。

双侧曲面的侧与其边界曲线方向

边界曲线方向与法向量方向根据右手螺旋定则判断。

斯托克斯公式

S 是光滑的双侧曲面，边界曲线 Γ 是按段光滑的连续曲线，若函数 P, Q, R 在 S 连同 Γ 上连续，且有连续的一阶偏导数，则：

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dy \, dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \, dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy = \oint_{\Gamma} P \, dx + Q \, dy + R \, dz$$

行列式形式

$$\iint_S \begin{vmatrix} dy \, dz & dz \, dx & dx \, dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_{\Gamma} P \, dx + Q \, dy + R \, dz$$

18.4 场论

概念

数量场：
 $f(x, y, z)$

向量场：
 $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$

梯度场

$V \subset \mathbb{R}^3$ 为一开集，函数 f 连续可微。

$$\text{grad} f(\vec{p}_0) = \frac{\partial f(\vec{p}_0)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f(\vec{p}_0)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f(\vec{p}_0)}{\partial z} \vec{k}$$

沿此方向，方向导数取最大值。

Nabla 算子

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

- $\nabla (cf) = c \nabla f$
- $\nabla (f \pm g) = \nabla f \pm \nabla g$
- $\nabla (fg) = f \nabla g + g \nabla f$
- $\nabla (\varphi \circ f) = (\varphi' \circ f) \nabla f$

散度场

$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ 为空间区域 V 上的向量值函数，定义数量函数

$$D(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

称为向量函数 \vec{F} 在 (x, y, z) 处的散度，记为 $\mathrm{div} \vec{F}$

高斯公式可写为：

$$\iiint_V \mathrm{div} \vec{F} \, dx \, dy \, dz = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{S}$$

上式两边取某一点 M_0 处的极限，可知 $\mathrm{div} \vec{F}(M_0)$ 是流量对体积 V 的变化率。

$\mathrm{div} \vec{F}(M_0) > 0$ 流出，称为源

$\mathrm{div} \vec{F}(M_0) < 0$ 流入，称为汇

若 $\forall P \in V, \mathrm{div} \vec{F}(P) = 0$ 称 \vec{F} 是无源场。

散度可记为 $\mathrm{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$

性质：

- 线性性
- $\nabla \cdot (\varphi \vec{F}) = \varphi \nabla \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \nabla \varphi$
- φ 是数量场，则 $\nabla \cdot \nabla \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$

记 $\nabla \cdot \nabla = \Delta$ 称 Laplace 算子。

若数量场 f 满足 Laplace 方程 $\Delta f = 0$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

则称 f 是 V 上的调和函数。

旋度场

$\displaystyle \vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ 为空间区域 V 上的向量值函数，定义向量函数：

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

称其为向量场 \vec{F} 在 (x, y, z) 处的旋度。其形成的场为旋度场。

或记：

$$\operatorname{rot} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}$$

或记：

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$$

斯托克斯公式可记为：

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

势

存在 φ 使得 $\operatorname{grad} \varphi = \vec{F}$ 则称向量场 \vec{F} 是有势场。

对含于 V 的任一封闭曲线 Γ $\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$ 则称 \vec{F} 是 V 上的一个保守场。

如果 $\operatorname{rot} \vec{F} \equiv \vec{0}$ 则称 \vec{F} 是 V 上的一个无旋场。

上述三个条件等价。

空间曲线积分与路径无关性

空间区域

若 V 内任一封闭曲线皆可以不经过 V 外的点而连续收缩为 V 内的一点，则称 V 为单连通区域。（亏格为 0？同胚于球？）否则称为复连通区域。

路径无关性

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是单连通区域， P, Q, R 在 Ω 上连续，且有一阶连续偏导，则下列四个条件等价：

1. 对任一按段光滑封闭曲线 L $\int_L P dx + Q dy + R dz$

= 0\$

2. Ω 内 $\int \limits_L P \mathrm{d}x + Q \mathrm{d}y + R \mathrm{d}z$ 与路径无关
3. $\exists u(x, y, z),$
 $\mathrm{s.t.}; (\mathrm{d}u = P \mathrm{d}x + Q \mathrm{d}y + R \mathrm{d}z)$
4. $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} \equiv \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial z}$

From:

<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:

https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:mian:pantw:real_analysis&rev=1588909715 

Last update: **2020/05/08 11:48**