

初等数论三大定理和缩系乘法群

这篇和算法没什么关系，纯粹是基础知识。

初等数论三大定理，指将整个初等数论框架支撑起来的三个定理，分别是Fermat-Euler（费马欧拉）定理、Wilson（威尔逊）定理和Chinese-Residue（中国剩余）定理。

其中FE定理说明取模意义下缩系（简化剩余系/缩剩余系）集合的乘法构成群，Wilson定理揭示了模为素数的乘法群的结构，而CR定理阐述了怎样将群和群结合起来，即多素因子模数乘法群的结构问题。

它们三者的本质，都是解释缩系乘法群的结构问题。而研究缩系乘法群的结构，最终结论的形式是：奇素数幂次群结构、2的幂次群结构、CR定理，三个定理作为最终的最高结论。

Fermat-Euler定理

内容

设欧拉函数 $\varphi(n)$ 是0到 $n-1$ 里与 n 互素的数（缩剩余系）的个数，即缩系乘法群的阶。对于缩系中任一元素 a 有：

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

特别地，当 n 是单个素数 p 的时候 $\varphi(p)$ 是 $p-1$ 即：（费马小定理）

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

这其实是群论里的定理。任意一个群，群里任意一个元素，自乘群的阶次，一定会回到单位元。即：元素的阶整除群的阶。

证明也简单：对缩系所有元素同时进行乘法操作，构成缩系元素的一个置换。（也可以采用群论中陪集的方法）

这个定理在数学题或者算法中，一般用于简化幂次。例如快速幂函数。

推广

将研究对象转移到缩系以外。在完系（完全剩余系）中，任一元素 a 有相似结论：

$$a^{t+\varphi\left(\frac{n}{(a^t, n)}\right)} \equiv a^t \pmod{n}$$

对于足够大的整数 t 成立。意思是 a 本身自乘很多次后，也会落入循环中，循环节是 n 去除 a^t 与 n 最大公约数的缩系元素个数的约数。

并且这个足够大的 t 一般要求 a 与 n 重合的那部分素因数被“消除”干净了，即 a^t 这部分素因数的幂次已经达到或超过了 n 中的相应幂次。

这个证明是显然的，分素因数讨论即可。

由于欧拉函数的积性，循环节显然是 $\varphi(n)$ 的约数。因此弱化一下就是这样：

个素因子的缩系乘法群互不相干，分别构成相应的维度。

当已知这个数在各个维度的坐标，想求这个数的时候，利用线性代数的知识，先求各个维度上的单位向量，然后向量点乘即可。

单位向量的求法，就是一次不定方程。

模为奇素数幂的缩系乘法群的结构

构成循环群。生成元叫做原根。

不止这类模有原根，事实上1、2、4、奇素数的幂、2倍奇素数的幂都有，也就是说这些缩系乘法群也是循环群，而其余的模都没有。

模为2的幂的缩系乘法群的结构

是循环群与 $\{-1,1\}$ 乘法群的笛卡尔积。

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team
Permanent link: <https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:namespace:%E5%88%9D%E7%AD%89%E6%95%B0%E8%AE%BA%E4%B8%B9%E5%A4%A7%E5%AE%9A%E7%90%B6%E5%92%8C%E7%B9%A9%E7%B3%BB%E4%B9%98%E6%B3%95%E7%BE%A4&rev=1590998929>
Last update: 2020/06/01 16:08