

# 初等数论三大定理和缩系乘法群

## 前言

这篇和算法没什么关系，纯粹是基础知识。

初等数论三大定理，指将整个初等数论框架支撑起来的三个定理，分别是Fermat-Euler（费马欧拉）定理、Wilson（威尔逊）定理和Chinese-Residue（中国剩余）定理。

其中FE定理说明取模意义下缩系（简化剩余系/缩剩余系）集合的乘法构成群，Wilson定理揭示了模为素数的乘法群的结构，而CR定理阐述了怎样将群和群结合起来，即多素因子模数乘法群的结构问题。

它们三者的本质，都是解释缩系乘法群的结构问题。而研究缩系乘法群的结构，最终结论的形式是：奇素数幂次群结构、2的幂次群结构、CR定理，三个定理作为最终的最高结论。

## Fermat-Euler定理

### 内容

设欧拉函数 $\varphi(n)$ 是0到n-1里与n互素的数（缩剩余系）的个数，即缩系乘法群的阶。对于缩系中任一元素a有：

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

特别地，当n是单个素数p的时候 $\varphi(p)$ 是p-1即：（费马小定理）

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

这其实是群论里的定理。任意一个群，群里任意一个元素，自乘群的阶次，一定会回到单位元。即：元素的阶整除群的阶。

证明也简单：对缩系所有元素同时进行乘法操作，构成缩系元素的一个置换。（也可以采用群论中陪集的方法）

这个定理在数学题或者算法中，一般用于简化幂次。例如快速幂函数。

### 推广

将研究对象转移到缩系以外。在完系（完全剩余系）中，任一元素a有相似结论：

$$a^{t+\varphi\left(\frac{n}{(a^t, n)}\right)} \equiv a^t \pmod{n}$$

对于足够大的整数t成立。意思是a本身自乘很多次后，也会落入循环中，循环节是n去除 $a^t$ 与n最大公约数的缩系元素个数的约数。

并且这个足够大的t一般要求a与n重合的那部分素因数被“消除”干净了，即 $a^t$ 这部分素因数的幂次已



## 中国剩余定理

很简单，不同素因子幂乘起来，对应于缩系乘法群的笛卡尔积。因此缩系乘法群的总体构成一个空间，各个素因子的缩系乘法群互不相干，分别构成相应的维度。

当已知这个数在各个维度的坐标，想求这个数的时候，利用线性代数的知识，先求各个维度上的单位向量，然后向量点乘即可。

单位向量的求法，就是一次不定方程。

## 缩系乘法群的结构

有个经典事实：群的结构与这个素数是不是2有关，当素数是2的时候群的结构会更加复杂。

### 模为奇素数幂

构成循环群。生成元叫做原根。

不止这类模有原根，事实上1、2、4、奇素数的幂、2倍奇素数的幂都有，也就是说这些缩系乘法群也是循环群，而其余的模都没有。

### 模为2的幂

当为1、2、4的时候，仍旧是循环群。

当大于等于8的时候，变为一个循环群（元素数为这个数除以4）与 $\{-1,1\}$ 乘法群的笛卡尔积。

著名的Klein四元群与模8的缩系乘法群同构。

## 离散对数

### 写在前面

这是一个天坑。关于离散对数的算法数不胜数，甚至是一个P与NP问题。如果未来的您能找到一个多项式时间求解离散对数问题的算法，那么今天的加密算法将半数失效，您不仅可以凭借这个算法轻松拿到图灵奖和菲尔兹奖，甚至可以改写世界历史。当然，如果您证明了不存在多项式时间的求解离散对数问题算法，相当于找到了P与NP问题的有效反例，照样可以拿到图灵奖和菲尔兹奖，只是无法改写历史的进程了而已。

由于本页面不打算涉及算法，那么这部分的算法计划将于暑假再开一个页面（这是因为烤漆实在没时间）。这里仅谈谈离散对数是怎么来的。

### 定义

离散对数，就来源于循环群。我们知道，原根是缩系乘法群的生成元，那么每个元素是原根的多少次幂呢？

求解幂次，就是标准的对数运算。



(当c为3, 即模数为8的时候, 定义为 $1+i$ ——当然这实在没什么用, 因为它同构于Klein四元群, 习惯采用别的处理方法)

例如模16, 有4个“生成元”(只能跑遍半个缩系) 3、5、11、13, 可以列表验证换底公式(验算不妨将除法改为计算乘法)仍然成立:

$n \pmod{16}$	1	9	5	13	3	11	7	5
$\log_3 n \pmod{16}$	0	2	$3+2i$	$1+2i$	1	3	$2+2i$	$2i$
$\log_{11} n \pmod{16}$	0	2	$1+2i$	$3+2i$	3	1	$2+2i$	$2i$
$\log_5 n \pmod{16}$	0	2	1	3	$3+2i$	$1+2i$	$2+2i$	$2i$
$\log_{13} n \pmod{16}$	0	2	3	1	$1+2i$	$3+2i$	$2+2i$	$2i$

利用复平面上两个维度同时取模(取模构成矩形)意义下的除法, 换底公式仍旧成立。虽然完备, 只是这么定义没什么实际用途罢了。

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: <https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:namespace:%E5%88%9D%E7%AD%89%E6%95%B0%E8%AE%BA%E4%B8%89%E5%A4%A7%E5%AE%9A%E7%90%86%E5%92%8C%E7%BC%A9%E7%B3%BB%E4%B9%98%E6%B3%95%E7%BE%A4&rev=1591030277>

Last update: 2020/06/02 00:51