

这个页面用于吐槽多校第四场的一道题目。作为大作业感觉不错，建议未来的助教们考虑考虑。

引言与题意

ZYB对数学有敏锐的直觉，尤其是在几何问题上。

几何问题是这样的：求 $\angle CAM$ 的值。

或者是这样的：如果 $AC=x-3$ $BE=20$ $AB=16$ $CD=x+5$ 求 x

为了更容易地分析问题，输入将包含逻辑形式，而不是原始的问题文本和图表。

给出若干个符合一定规则的几何题条件。

要求出某个角或者某条边或未知数 x 的值。

基本逻辑形式

- 数字。使用十进制整数表示数字。
- 未知数字 x 是唯一未知的数字。
- 表达式。表达式可以是一个数字，也可以是一个表达式，其中 x 只出现一次，最多一次加减法，最多一次乘法。乘法符号可以省略。
 - 例如 233 $3x+5$ x^2+3 $x-2$ 是有效表达式，但 $3x+5-3$ $x+2x$ $5*3$ $2y$ 不是。
- 点。使用单大写字母表示点。
- 线。用 $\text{Line}(\text{Point}, \text{Point})$ 来表示一条线（实际上它是一条线段）。
 - 例如 $\text{Line}(A, B)$
- 角。使用 $\text{Angle}(\text{Point}, \text{Point}, \text{Point})$ 来表示一个角。
 - 例如 $\text{Angle}(A, B, C)$
- 圆。使用 $\text{Circle}(\text{Point})$ 表示具有特定中心的圆。
 - 例如 $\text{Circle}(O)$
- 线段长。使用 $\text{LengthOf}(\text{Line})$ 来获得特定线段的长度值。
 - 例如 $\text{LengthOf}(\text{Line}(A, B))$
- 角度。用 $\text{MeasureOf}(\text{Angle})$ 得到特定角度的度数值。
 - 例如 $\text{MeasureOf}(\text{Angle}(A, B, C))$
- 项 Term 项=线段长|角度|表达式。
- 相等。使用 $\text{Equals}(\text{Term}, \text{Term})$ 来声明这两个项的值相等。
 - 例如 $\text{Equals}(\text{LengthOf}(A, B), 2)$ $\text{Equals}(\text{MeasureOf}(\text{angle}(A, B, C)))$
- 垂直。使用 $\text{Perpendicular}(\text{Line}, \text{Line})$ 表示两条垂直线。
 - 例如 $\text{Perpendicular}(\text{Line}(A, C), \text{Line}(B, D))$
- 平行。使用 $\text{Parallel}(\text{Line}, \text{Line})$ 表示两条平行线。保证各点都是有序的。
 - 例如 $\text{Parallel}(\text{Line}(A, C), \text{Line}(B, D))$
- 点在线上。使用 $\text{PointLiesOnLine}(\text{Point}, \text{Line})$ 来表示位于直线上的点。
 - 例如 $\text{PointLiesOnLine}(A, \text{Line}(B, C))$
- 点在圆上。使用 $\text{PointLiesOnCircle}(\text{Point}, \text{Circle})$ 表示位于圆上的点。
 - 例如 $\text{PointLiesOnCircle}(A, \text{Circle}(O))$
- 问题。使用 $\text{Find}(\text{Term})$ 来询问给定项的确切值。
 - 例如 $\text{Find}(x)$ $\text{Find}(\text{LengthOf}(\text{Line}(A, B)))$

请注意，图和文本中的所有条件都将转换为逻辑形式。你现在得到了一个只有一个问题 Find phrase 的逻辑表单列表，并希望找到解决方案。

定理

- 平角定理：如果点C位于AB上，则 $\angle ACB = 180^\circ$ 。
- 等腰三角形定理：在三角形ABC中，如果 $AB = AC$ 则 $\angle ACB = \angle ABC$ 反之亦然。
- 三角形内角和定理：任何三角形的三个内角加起来等于 180° 。
- 勾股定理：在直角三角形中，如果三条边的长度分别是a b c（其中c是斜边），那么 $a^2 + b^2 = c^2$
 - 这个定理的逆定理也成立，但是暂时用不到。
- 全等三角形定理：两个三角形满足下列条件时为全等。
 - SSS 如果三条边对应相等，则两个三角形全等。
 - SAS 和 ASA 如果有两个对应角相等（相似），又有一组对应边相等，则两个三角形全等。
 - HL 对应斜边和对应直角边相等的两个直角三角形全等。
 - 在全等三角形中，对应边和对应角相等。
- 相似三角形定理：两个三角形在满足以下条件时是相似的。
 - SSS 三条对应边成比例的两个三角形相似。
 - SAS 两条对应边成比例，且夹角相等，则两个三角形相似。
 - AA 两个对应角相等的两个三角形相似。
 - HL 对应斜边和对应直角边成比例的两个直角三角形相似。
 - 在相似三角形中，对应角相等，对应边成比例。
- 平行线定理：如果两条直线平行，则同位角 corresponding 角相等，内错角 alternate 角相等，同旁内角 interior 互补 supplementary 角。
- 直径相等定理：同一个圆的不同直径相等。圆的中心也是每个直径的中点。
- 圆上点定理：如果AB是圆O的直径，另一个点C位于圆O上，则 $\angle ACB = 90^\circ$

建议

- 逻辑形式可以嵌套。
- 保证每个案例至少有一个好的解决方案。一个好的解决方法是：你可以用上面的定理一步一步地解决问题；每一步之后，你获得的新值都是有效表达式（这也意味着表达式中涉及的数字总是整数）；步骤数不超过4。
- 给定的逻辑形式是充分的。
 - 例如：如果一个段上有四个点A B C D 那么将列出四个相应的PointLiesOnLine短语 A-B-C A-B-D A-C-D B-C-D
 - 例如：如果给你一个短语Perpendicular(Line (A, C), Line(B, D)) 这两条线的交集也会给出。
 - 即 PointLiesOnLine(E, Line(A, C)) 和 PointLiesOnLine(E, Line(B, D)) 如果交集是E
- 如果AO BO CO是三个不同的线段，则很难检测哪个线段位于中间。在这个问题中，您不需要在 $\angle AOB$ $\angle AOC$ $\angle BOC$ 之间建立关系。
 - 除非在这种明显的情况下：如果B位于AC上，则可以使用 $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$
- 所有的数据都来自现实世界的问题，而不是人工构建的。
- 总共有20个问题。从中选取样本（包括10个问题）。

输入输出描述

输入包含多个样例。输入的第一行包含一个整数T（总是5），即样例数。

对于每个样例，第一行包含一个整数N（ $3 \leq N \leq 12$ ）表示逻辑形式的数量。第二行包含几个以空格分隔的大

写字母，表示与此问题相关的所有点。第三行包含几个长度为2的大写字母字符串，表示与此问题相关的所有直线（线段）。在接下来的N行中，有一个字符串 s_i $|s_i| \leq 50$ 表示第*i*个逻辑形式。

保证最后一个逻辑形式以“Find”开头。

对于每种情况，输出一个表示答案的整数。不应该牵涉到未知的数字。

样例一

```

5
11
N M B C T A D
MA MB MT MD AB AC BC TC TN CN
Equals(MeasureOf(Angle(M, T, N)), 28)
PointLiesOnLine(B, Line(A, C))
PointLiesOnLine(D, Line(T, N))
PointLiesOnCircle(N, Circle(M))
PointLiesOnCircle(C, Circle(M))
PointLiesOnCircle(T, Circle(M))
PointLiesOnCircle(A, Circle(M))
Perpendicular(Line(A, B), Line(M, B))
Perpendicular(Line(D, M), Line(T, D))
Equals(LengthOf(Line(B, M)), LengthOf(Line(D, M)))
Find(MeasureOf(Angle(C, A, M)))
8
A B C D E
AC AD AB AE BC BE CD DE
Equals(LengthOf(Line(A, C)), x-3)
Equals(LengthOf(Line(A, B)), 16)
Equals(LengthOf(Line(C, D)), x+5)
Equals(LengthOf(Line(B, E)), 20)
PointLiesOnLine(C, Line(A, D))
PointLiesOnLine(B, Line(A, E))
Parallel(Line(B, C), Line(E, D))
Find(x)
12
A B C D F
CB CD CA CF BD BA BF DA DF AF
Equals(MeasureOf(Angle(F, A, D)), 20)
Equals(LengthOf(Line(D, A)), 9)
Equals(MeasureOf(Angle(F, A, B)), 32)
Equals(LengthOf(Line(B, A)), 6)
Equals(MeasureOf(Angle(A, D, B)), 40)
PointLiesOnLine(F, Line(C, A))
PointLiesOnLine(F, Line(B, D))
Parallel(Line(A, D), Line(B, C))
Equals(LengthOf(Line(A, D)), LengthOf(Line(B, C)))
Parallel(Line(A, B), Line(D, C))
Equals(LengthOf(Line(A, B)), LengthOf(Line(D, C)))
Find(MeasureOf(Angle(D, B, A)))

```

```
5
A B C
AB BC AC
Equals(LengthOf(Line(A, B)), 2x-7)
Equals(LengthOf(Line(B, C)), 4x-21)
Equals(LengthOf(Line(A, C)), x-3)
Equals(LengthOf(Line(A, B)), LengthOf(Line(B, C)))
Find(LengthOf(Line(A, C)))

5
A B C
AB AC BC
Equals(LengthOf(Line(A, C)), 3)
Equals(LengthOf(Line(A, B)), 5)
Equals(LengthOf(Line(B, C)), x)
Perpendicular(Line(A, C), Line(B, C))
Find(x)

28
35
88
4
4
```

样例二

```
5
7
A C B D E
AB AC AE AD BE BC DE CD
Equals(LengthOf(Line(A, C)), 16)
Equals(LengthOf(Line(E, D)), 5)
Equals(LengthOf(Line(A, B)), 12)
PointLiesOnLine(B, Line(A, C))
Parallel(Line(C, D), Line(B, E))
PointLiesOnLine(E, Line(A, D))
Find(LengthOf(Line(A, E)))

12
A B C D F
CB CD CA CF BD BA BF DA DF AF
Equals(MeasureOf(Angle(F, A, D)), 20)
Equals(LengthOf(Line(D, A)), 9)
Equals(MeasureOf(Angle(F, A, B)), 32)
Equals(LengthOf(Line(B, A)), 6)
Equals(MeasureOf(Angle(D, B, C)), 40)
PointLiesOnLine(F, Line(C, A))
PointLiesOnLine(F, Line(B, D))
Parallel(Line(A, D), Line(B, C))
Equals(LengthOf(Line(A, D)), LengthOf(Line(B, C)))
Parallel(Line(A, B), Line(D, C))
```

```

Equals(LengthOf(Line(A, B)), LengthOf(Line(D, C)))
Find(MeasureOf(Angle(A, D, C)))
12
A B C D E F G
GC GD GB GF GA GE CE BF BA FA
Equals(MeasureOf(Angle(A, G, C)), 60)
PointLiesOnLine(F, Line(G, A))
PointLiesOnLine(G, Line(C, E))
PointLiesOnLine(G, Line(B, F))
PointLiesOnLine(G, Line(B, A))
PointLiesOnLine(F, Line(B, A))
PointLiesOnCircle(C, Circle(G))
PointLiesOnCircle(B, Circle(G))
PointLiesOnCircle(A, Circle(G))
PointLiesOnCircle(E, Circle(G))
Perpendicular(Line(G, F), Line(G, D))
Find(MeasureOf(Angle(B, G, E)))
3
A B C
AB AC BC
Equals(MeasureOf(Angle(A, B, C)), 40)
Equals(MeasureOf(Angle(C, A, B)), 25)
Find(MeasureOf(Angle(B, C, A)))
6
D A B K G
KG GD DA KA AB KB
Equals(MeasureOf(Angle(B, A, D)), 3x - 70)
Equals(MeasureOf(Angle(K, G, D)), 120)
Equals(MeasureOf(Angle(G, D, A)), x)
Parallel(Line(K, G), Line(A, D))
PointLiesOnLine(A, Line(K, B))
Find(x)

15
128
60
115
60

```

核心思路

题目保证了每一步的结果依然是 expressions[]

我们不断用已知的条件和定理扩展我们知道的量，直到找到答案。中途可能需要构方程和解方程。

整个过程有点像迭代加深搜索。

注意点

同一个角的表示有很多种，注意要对它们建立Equal关系。

对于所有 PointLiesOnLine[] 要构建边长相加的 Equal 关系和角度相加的 Equal 关系。

对于平行线，同位角可能不存在，所以可以只用内错角和同旁内角建立关系。

可以先不断地用“基本定理”传播 expression[] 到最后再用勾股定理、相似定理等复杂的定理解方程。

要能检测出图中的三角形（只要三点不共线就算），并积极寻找全等和相似的三角形对。

在运用一些定理时，所用的条件可能不是“完全”的。比如我们知道两条边的长度都是 $2x+3$ 我们依然可以利用它们相等来构建对角相等或者三角形全等的关系。

可以用 Find 导向去优化搜索方向。不过这道题是不必要的，你把所有可以求的量求出来也是 OK 的。

在解出 x 后，要把之前所有用 x 表示的表达式都带入一遍。

复杂度为 所有状态量 * 定理数量 * 步数上限 (4)。

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team



Permanent link:
<https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:namespace:%E5%B0%8F%E5%9E%8Bmatlab%E7%9A%84%E5%AE%9E%E7%8E%B0%E6%96%B9%E5%BC%8F&rev=1595324902>

Last update: 2020/07/21 17:48