

这个页面用于吐槽多校第四场的一道题目。作为大作业感觉不错，建议未来的助教们考虑考虑。

## 引言与题意

ZYB对数学有敏锐的直觉，尤其是在几何问题上。

几何问题是这样的：求 $\angle CAM$ 的值。

或者是这样的：如果 $AC=x-3$   $BE=20$   $AB=16$   $CD=x+5$  求 $x$

为了更容易地分析问题，输入将包含逻辑形式，而不是原始的问题文本和图表。

给出若干个符合一定规则的几何题条件。

要求出某个角或者某条边或未知数 $x$ 的值。

## 基本逻辑形式

- 数字。使用十进制整数表示数字。
- 未知数字 $x$ 是唯一未知的数字。
- 表达式`Expression`表达式可以是一个数字，也可以是一个表达式，其中 $x$ 只出现一次，最多一次加减法，最多一次乘法。乘法符号可以省略。
  - 例如`233` `3x+5` `x*2+3` `x-2`是有效表达式，但`3x+5-3` `x+2x` `5*3` `2y`不是。
- 点。使用单大写字母表示点。
- 线。用`Line(Point, Point)`来表示一条线（实际上它是一条线段）。
  - 例如`Line(A, B)`
- 角。使用`Angle(Point, Point, Point)`来表示一个角。
  - 例如`Angle(A,B,C)`
- 圆。使用`Circle(Point)`表示具有特定中心的圆。
  - 例如`Circle(O)`
- 线段长。使用`LengthOf(Line)`来获得特定线段的长度值。
  - 例如`LengthOf(Line(A, B))`
- 角度。用`MeasureOf(Angle)`得到特定角度的度数值。
  - 例如`MeasureOf(Angle(A,B,C))`
- 项`Term`项=线段长|角度|表达式。
- 相等。使用`Equals(Term,Term)`来声明这两个项的值相等。
  - 例如`Equals(LengthOf(A,B), 2)` `Equals(MeasureOf(angle(A, B, C))`
- 垂直。使用`Perpendicular(Line, Line)`表示两条垂直线。
  - 例如`Perpendicular(Line (A, C), Line(B, D))`
- 平行。使用`Parallel(Line,Line)`表示两条平行线。保证各点都是有序的。
  - 例如`Parallel(Line (A, C), Line(B, D))`
- 点在线上。使用`PointLiesOnLine(Point, Line)`来表示位于直线上的点。
  - 例如`PointLiesOnLine(A, Line(B, C))`
- 点在圆上。使用`PointLiesOnCircle(Point, Circle)`表示位于圆上的点。
  - 例如`PointLiesOnCircle(A, Circle(O))`
- 问题。使用`Find(Term)`来询问给定项的确切值。
  - 例如`Find(x)` `Find(LengthOf(Line(A,B)))`

请注意，图和文本中的所有条件都将转换为逻辑形式。你现在得到了一个只有一个问题`Find phrase`的逻辑表单列表，并希望找到解决方案。

## 定理

- 平角定理：如果点C位于AB上，则 $\angle ACB=180^\circ$
- 等腰三角形定理：在三角形ABC中，如果 $AB=AC$ 则  $\angle ACB=\angle ABC$ 反之亦然。
- 三角形内角和定理：任何三角形的三个内角加起来等于 $180^\circ$ 。
- 勾股定理：在直角三角形中，如果三条边的长度分别是 $a, b, c$ （其中 $c$ 是斜边），那么 $a^2+b^2=c^2$ 
  - 这个定理的逆定理也成立，但是暂时用不到。
- 全等三角形定理：两个三角形满足下列条件时为全等。
  - SSS如果三条边对应相等，则两个三角形全等。
  - SAS如果两边及其夹角对应相等，则两个三角形全等。
  - AAS和ASA如果有两个对应角相等（相似），又有一组对应边相等，则两个三角形全等。
  - HL对应斜边和对应直角边相等的两个直角三角形全等。
  - 在全等三角形中，对应边和对应角相等。
- 相似三角形定理：两个三角形在满足以下条件时是相似的。
  - SSS三条对应边成比例的两个三角形相似。
  - SAS两条对应边成比例，且夹角相等，则两个三角形相似。
  - AA两个对应角相等的两个三角形相似。
  - HL对应斜边和对应直角边成比例的两个直角三角形相似。
  - 在相似三角形中，对应角相等，对应边成比例。
- 平行线定理：如果两条直线平行，则同位角corresponding相等，内错角alternate相等，同旁内角interior互补supplementary
- 直径相等定理：同一个圆的不同直径相等。圆的中心也是每个直径的中点。
- 圆上点定理：如果AB是圆O的直径，另一个点C位于圆O上，则 $\angle ACB=90^\circ$

## 建议

- 逻辑形式可以嵌套。
- 保证每个案例至少有一个好的解决方案。一个好的解决方法是：你可以用上面的定理一步一步地解决问题；每一步之后，你获得的新值都是有效表达式（这也意味着表达式中涉及的数字总是整数）；步骤数不超过4。
- 给定的逻辑形式是充分的。
  - 例如：如果一个段上有四个点A, B, C, D那么将列出四个相应的PointLiesOnLine短语A-B-C, A-B-D, A-C-D, B-C-D
  - 例如：如果给你一个短语Perpendicular(Line (A, C), Line(B, D))这两条线的交集也会给出。
    - 即PointLiesOnLine(E, Line(A, C))和PointLiesOnLine(E, Line(B, D))如果交集是E
- 如果AO, BO, CO是三个不同的线段，则很难检测哪个线段位于中间。在这个问题中，您不需要在 $\angle AOB, \angle AOC, \angle BOC$ 之间建立关系。
  - 除非在这种明显的情况下：如果B位于AC上，则可以使用 $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$
- 所有的数据都来自现实世界的问题，而不是人工构建的。
- 总共有20个问题。从中选取样本（包括10个问题）。

## 输入输出描述

输入包含多个样例。输入的第一行包含一个整数T（总是5），即样例数。

对于每个样例，第一行包含一个整数 $N, 3 \leq N \leq 12$ 表示逻辑形式的数量。第二行包含几个以空格分隔的大

写字母，表示与此问题相关的所有点。第三行包含几个长度为2的大写字母字符串，表示与此问题相关的所有直线（线段）。在接下来的N行中，有一个字符串 $s_i$   $|s_i| \leq 50$ 表示第i个逻辑形式。

保证最后一个逻辑形式以“Find”开头。

对于每种情况，输出一个表示答案的整数。不应该牵涉到未知的数字。

## 样例一

```

5
11
N M B C T A D
MA MB MT MD AB AC BC TC TN CN
Equals(MeasureOf(Angle(M, T, N)), 28)
PointLiesOnLine(B, Line(A, C))
PointLiesOnLine(D, Line(T, N))
PointLiesOnCircle(N, Circle(M))
PointLiesOnCircle(C, Circle(M))
PointLiesOnCircle(T, Circle(M))
PointLiesOnCircle(A, Circle(M))
Perpendicular(Line(A, B), Line(M, B))
Perpendicular(Line(D, M), Line(T, D))
Equals(LengthOf(Line(B, M)), LengthOf(Line(D, M)))
Find(MeasureOf(Angle(C, A, M)))
8
A B C D E
AC AD AB AE BC BE CD DE
Equals(LengthOf(Line(A, C)), x-3)
Equals(LengthOf(Line(A, B)), 16)
Equals(LengthOf(Line(C, D)), x+5)
Equals(LengthOf(Line(B, E)), 20)
PointLiesOnLine(C, Line(A, D))
PointLiesOnLine(B, Line(A, E))
Parallel(Line(B, C), Line(E, D))
Find(x)
12
A B C D F
CB CD CA CF BD BA BF DA DF AF
Equals(MeasureOf(Angle(F, A, D)), 20)
Equals(LengthOf(Line(D, A)), 9)
Equals(MeasureOf(Angle(F, A, B)), 32)
Equals(LengthOf(Line(B, A)), 6)
Equals(MeasureOf(Angle(A, D, B)), 40)
PointLiesOnLine(F, Line(C, A))
PointLiesOnLine(F, Line(B, D))
Parallel(Line(A, D), Line(B, C))
Equals(LengthOf(Line(A, D)), LengthOf(Line(B, C)))
Parallel(Line(A, B), Line(D, C))
Equals(LengthOf(Line(A, B)), LengthOf(Line(D, C)))
Find(MeasureOf(Angle(D, B, A)))

```

```
5
A B C
AB BC AC
Equals(LengthOf(Line(A, B)), 2x-7)
Equals(LengthOf(Line(B, C)), 4x-21)
Equals(LengthOf(Line(A, C)), x-3)
Equals(LengthOf(Line(A, B)), LengthOf(Line(B, C)))
Find(LengthOf(Line(A, C)))
```

```
5
A B C
AB AC BC
Equals(LengthOf(Line(A, C)), 3)
Equals(LengthOf(Line(A, B)), 5)
Equals(LengthOf(Line(B, C)), x)
Perpendicular(Line(A, C), Line(B, C))
Find(x)
```

```
28
35
88
4
4
```

## 样例二

```
5
7
A C B D E
AB AC AE AD BE BC DE CD
Equals(LengthOf(Line(A, C)), 16)
Equals(LengthOf(Line(E, D)), 5)
Equals(LengthOf(Line(A, B)), 12)
PointLiesOnLine(B, Line(A, C))
Parallel(Line(C, D), Line(B, E))
PointLiesOnLine(E, Line(A, D))
Find(LengthOf(Line(A, E)))
12
A B C D F
CB CD CA CF BD BA BF DA DF AF
Equals(MeasureOf(Angle(F, A, D)), 20)
Equals(LengthOf(Line(D, A)), 9)
Equals(MeasureOf(Angle(F, A, B)), 32)
Equals(LengthOf(Line(B, A)), 6)
Equals(MeasureOf(Angle(D, B, C)), 40)
PointLiesOnLine(F, Line(C, A))
PointLiesOnLine(F, Line(B, D))
Parallel(Line(A, D), Line(B, C))
Equals(LengthOf(Line(A, D)), LengthOf(Line(B, C)))
Parallel(Line(A, B), Line(D, C))
```

```

Equals(LengthOf(Line(A, B)), LengthOf(Line(D, C)))
Find(MeasureOf(Angle(A, D, C)))
12
A B C D E F G
GC GD GB GF GA GE CE BF BA FA
Equals(MeasureOf(Angle(A, G, C)), 60)
PointLiesOnLine(F, Line(G, A))
PointLiesOnLine(G, Line(C, E))
PointLiesOnLine(G, Line(B, F))
PointLiesOnLine(G, Line(B, A))
PointLiesOnLine(F, Line(B, A))
PointLiesOnCircle(C, Circle(G))
PointLiesOnCircle(B, Circle(G))
PointLiesOnCircle(A, Circle(G))
PointLiesOnCircle(E, Circle(G))
Perpendicular(Line(G, F), Line(G, D))
Find(MeasureOf(Angle(B, G, E)))
3
A B C
AB AC BC
Equals(MeasureOf(Angle(A, B, C)), 40)
Equals(MeasureOf(Angle(C, A, B)), 25)
Find(MeasureOf(Angle(B, C, A)))
6
D A B K G
KG GD DA KA AB KB
Equals(MeasureOf(Angle(B, A, D)), 3x-70)
Equals(MeasureOf(Angle(K, G, D)), 120)
Equals(MeasureOf(Angle(G, D, A)), x)
Parallel(Line(K, G), Line(A, D))
PointLiesOnLine(A, Line(K, B))
Find(x)

15
128
60
115
60

```

## 核心思路

题目保证了每一步的结果依然是 expressions[]

我们不断用已知的条件和定理扩展我们知道的量，直到找到答案。中途可能需要构方程和解方程。

整个过程有点像迭代加深搜索。

## 注意点

同一个角的表示有很多种，注意要对它们建立Equal关系。

对于所有 PointLiesOnLine[]要构建边长相加的 Equal 关系和角度相加的 Equal 关系。

对于平行线，同位角可能不存在，所以可以只用内错角和同旁内角建立关系。

可以先不断地用“基本定理”传播 expression[]到最后再用勾股定理、相似定理等复杂的定理解方程。

要能检测出图中的三角形（只要三点不共线就算），并积极寻找全等和相似的三角形对。

在运用一些定理时，所用的条件可能不是“完全”的。比如我们知道两条边的长度都是  $2x+3$ []我们依然可以利用它们相等来构建 对角相等 或者 三角形全等 的关系。

可以用 Find 导向去优化搜索方向。不过这道题是不必要的，你把所有可以求的量求出来也是 OK 的。

在解出  $x$  后，要把之前所有用  $x$  表示的表达式都带入一遍。

复杂度为 所有状态量 \* 定理数量 \* 步数上限 (4)。

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: <https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:namespace:%E5%B0%8F%E5%9E%8Bmatlab%E7%9A%84%E5%AE%9E%E7%8E%B0%E6%96%B9%E5%BC%8F&rev=1595324939>

Last update: 2020/07/21 17:48