

以下内容参考自北大版《组合数学》。

分拆

分拆：将自然数 n 写成递降正整数和的表示。

$$n = r_1 + r_2 + \dots + r_k \quad r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_k \geq 1$$

和式中每个正整数称为一个部分。

分拆数 p_n 自然数 n 的分拆方法数。

自0开始的分拆数：

n	0	1	2	3	4	5	6	7
p_n	1	1	2	3	5	7	11	15

其中恰有 k 个部分的分拆，称为 k 部分拆数，记作 $p(n,k)$

本题要求计算 k 部分拆数 $p(n,k)$ 多组输入，其中 n 上界为10000， k 上界为1000，对1000007取模。

显然 k 部分拆数 $p(n,k)$ 同时也是下面方程的解数：

$$n - k = y_1 + y_2 + \dots + y_k \quad y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_k \geq 0$$

如果这个方程里面恰有 j 个部分非0，则恰有 $p(n-k,j)$ 个解。因此有和式：

$$p(n,k) = \sum_{j=1}^k p(n-k,j)$$

相邻两个和式作差，得：

$$p(n,k) = p(n-1,k-1) + p(n-k,k)$$

根据这个可以轻易地写出程序。

```
#include<stdio.h>
#include<string.h>

int p[10005][1005];/*将自然数n分拆为k个部分的方法数*/

int main()
{
    int n,k;
    while(~scanf("%d%d",&n,&k))
    {
        memset(p,0,sizeof(p));
        p[0][0]=1;
        int i;
        for(i=1;i<=n;++i)
        {
            int j;
            for(j=1;j<=k;++j)
            {
```

```
if(i-j>=0)/*p[i-j][j]所有部分大于1*/
{
    p[i][j]=(p[i-j][j]+p[i-1][j-1])%1000007;/*p[i-1][j-1]至少有一个部分为1。*/
}
}
}
printf("%d\n",p[n][k]);
}
```

小结论一

生成函数：一种幂级数。各项的系数为数列中的对应项。

由等比数列求和公式，有：

$$\frac{1}{1-x^k}=1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\dots$$

$$1+p_1 x+p_2 x^2+p_3 x^3+\dots=\frac{1}{1-x} \frac{1}{1-x^2} \frac{1}{1-x^3} \dots$$

对于k部分拆数，生成函数稍微复杂。具体写出如下：

$$\sum_{n,k=0}^{\infty} \{p(n,k) x^n y^k\}=\frac{1}{1-xy} \frac{1}{1-x^2 y} \frac{1}{1-x^3 y} \dots$$

小结论二

Ferrers图：将分拆的每个部分用点组成的行表示。每行点的个数为这个部分的大小。

根据分拆的定义，Ferrers图中不同的行按照递减的次序排放。最长行在最上面。

例如：分拆 $12=5+4+2+1$ 的Ferrers图。

[Ferrers图.png](#)

将一个Ferrers图沿着对角线翻转，得到的新Ferrers图称为原图的共轭，新分拆称为原分拆的共轭。显然，共轭是对称的关系。

例如上述分拆 $12=5+4+2+1$ 的共轭是分拆 $12=4+3+2+2+1$ 。


最大k分拆数：自然数n的最大部分为k的分拆个数。

根据共轭的定义，有显然结论：

最大k分拆数与k部分拆数相同，均为 $p(n,k)$

互异分拆

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
<https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:namespace:%E6%95%B4%E6%95%B0%E5%88%86%E6%8B%86%E9%97%AE%E9%A2%98&rev=1588749759> 

Last update: **2020/05/06 15:22**