2025/11/29 16:48 1/6 素数幂次与p进数问题

# 素数幂次问题

## 记号约定

在本文中,采用习惯记号,素数p在n中的幂次记为:

\$\$v p(n)\$\$

代表p的这个幂次恰好整除n□而比这个值更高的幂次无法整除n□由于"恰好整除"记号(双竖线)容易和C语言"或"运算混淆,故不采用恰好整除记号。

另外一个记号也在后文出现□p进制下n的各位数字和:

\$\$S\_p(n)\$\$

这个记号不一定要求p是素数,只是后文的p均为素数。

阅读本文时,希望能提前大致了解模p的缩系乘法群的相关知识。

## p进数

### 写在前面

因为p进数的主体部分是数论一个艰深的分支,这里只阐述p进数的初始观点,不做深入研究,仅为了方便理解后文的内容。

p进数的基础,是p进制整数。所有p进制下正整数,改写为p进数时形式不变。这部分很简单,默认所有人都已经会了。

### 取模的观点

例如二进制数110110和101110。

如果我们模8的话,相当于取这两个数的最后三位,结果都为110。这也就是说,模8意义下无法区分两个数。 而模16的时候,相当于取这两个数的最后四位,分别为0110和1110。这个时候才能区分开两个数。

因此有这种感觉,模4就能区分的两个数,比模16才能区分的两个数,在二进数意义下距离更远。

p进数重新定义了两个数的距离。如果模p的a次幂才能够区分两个数,那么这两个数的距离就是1除以p的a次幂,即写成p进数表示后从右往左第几位才开始不同。因此□p进数表示的数无法像普通实数那样排在一条直线上,即没有通常意义的序关系。

因此,模数为素数幂次时,高幂次模数是对低幂次模数更加细化的划分。这样就理解了p进数中更靠左的位数更小,与一般的整数理解恰好相反。

也可以这样理解:多项式除法的时候,既可以使得余式的次数越除越高,也可以使得余式的次数越除越低。这依赖于除法的意义不同,导致除法的方向相反。

由于越靠左的位数表示距离越近,权重越小,因此p进数下的数左边可能会无限长,但右边一定有限长,即小数点后的位数有限。

### p进数下的有理数

第一种解释,就是上述整数的除法。只是这次要求从右往左除。

类比一般的小数,这种解释也表明□p进数下的有理数,左边要么有限,要么无限循环。

因为有取模的意义,采用p进数的时候,有理数本身和它的表示一定是一一对应的,而不是像普通的p进制存在一二对应。

例如7进制下,0.6666666......和1表示同一个数,即每个有限小数都是一二对应,存在两种表示方法,而7进赋值下......6666666.0和1表示不同的数,至少在有理数范畴,实际的数与它的表示永远是一一对应的。

上面例子的......6666666.0事实上表示-1□p进数里没有负号。

第二种解释,采用数论倒数。

例如模13意义下,无法区分1/3和9,那么有理数1/3在13进数里最后一位就是9,并且是小数点前一位。如果想知道有理数1/3在13进赋值里倒数第二位是多少,就需要求解模169的时候3的倒数是多少,以此类推。

这两种解释完全等价。

采用p进数的时候,小数点后不为0的情况(合法p进赋值数必然有限长),就是有理数分母中存在p的情况。例如0.1表示1/p□左边无限循环的情况,就是分母中存在非p素因子的情况,也有可能代表负数。

采用p进数方法记录的数,加减乘除的规则都与普通的整数完全相同,只是除法方向相反而已。

因此可以找一个计数方法巧妙记录有理数,例如将1/3就记录成……10101010101等等,在数论方面的性质仍旧保留了。

### p进数下的无理数

规定,每一个右端有限,左边无限不循环的合法p进数定义一个p进数意义下的无理数。那么全体合法p进数对应全体p进数意义下的实数。

数列的收敛:当且仅当随着p进数数列不断延伸□p进数从右往左各位逐一确定(不再改变),则p进数数列收敛于一个p进数。

数列发散于无穷:当且仅当随着p进数数列不断延伸□p进数的右边位数不断增长,可以增长到任意位数,则p进数数列发散于无穷。

其余情况为一般的发散(不收敛)。

定义了收敛和发散,自然所有可以收敛到的值,对应全体p进数意义下的实数。也就是说,可以用无穷的p进数有理数数列逼近任一个p进数实数。

p进数意义下的实数与正常的实数不同,往往不存在一一对应关系。一些正常的实数可能不对应于任何p进数意义下的实数,一些p进数意义下的实数也可能不表示任何正常实数。当然,也不保证两者一多对应的存在,因此事实上p进数创造了新的微积分体系。

https://wiki.cvbbacm.com/ Printed on 2025/11/29 16:48

2025/11/29 16:48 3/6 素数幂次与p进数问题

例如熟悉的指对数计算,采用\$e^x\$和\$\ln x\$引入,计算时采用展开成无穷级数的方法。那么很多正常的实数就没办法表示,因为两个无穷级数在p进赋值里存在收敛域(收敛域不难计算),一个普通的x在正常实数范畴可以存在指对数,到p进数里就可能落在收敛域之外。又有可能在正常实数里负数无法计算对数(暂不考虑复数意义下),但是将负数表示为p进数之后可能落在收敛域里,就存在对数。

后文将探讨收敛域问题。

## 升幂定理

### 总述

又叫LTE□Lifting The Exponent□□现在统称升幂定理。本来是用于解决p进赋值问题的工具,但是由于它超好用而基础,已经深入到高中竞赛之中。

由于缩系乘法群的结构不同,根据素数为奇素数或2,分为LTEP定理和LTE2定理两部分。

#### **LTEP**

这是p为奇素数的情况。

使用本定理的前提:

第一条□p整除a-b□即模p意义下无法区分a和b□

第二条□p既不整除a□也不整除b□即a与b在p进制下末位不为0。

那么□\$a^n\$和\$b^n\$距离有多近呢?即究竟要取多大的模才能区分\$a^n\$和\$b^n\$呢?下面这个公式恒成立:

 $$v_p(a^n-b^n)=v_p(a-b)+v_p(n)$ 

即贡献分为两部分:原本的距离部分和指数的部分。

#### LTE2

这是p为2的情况。

使用本定理的前提:

条件一□a和b都是奇数。

条件二[n为偶数,或者4整除a-b]

由于群的结构不同,最终的结论也略有不同。事实上二进赋值与其他的p进赋值的性质不太一样。

 $$$v_2(a^n-b^n)=v_2(a-b)+v_2(a+b)+v_2(n)-1$$ 

贡献实际上也分为两部分:原本的距离部分和指数的部分,只是原本距离部分变复杂了。

条件二比较严格。当4不整除a-b□且n为奇数的时候,定理就不适用了,即此时无法借助本定理计

算\$v 2(a^n-b^n)\$[]

## 素数在阶乘中的幂次

一般在解析数论研究中偏爱这个式子,最早是由Gauss研究的:

 $p(n!)=\sum {k=0}^{\int \int {\int {p^k}\right}}$ 

这里推荐使用更加流行而简单的公式,替代上面这个繁杂的式子。它用到了文章开头的p进制下各位数字和:

 $p(n!)=\frac{n-S}{p(n)}{p-1}$ \$\$

与等比数列求和公式很相似。由于涉及各位数字和,利用数学归纳法可以轻松证明。

特别地,阶乘中2的幂次是:

\$\$v 2(n!)=n-S 2(n)\$\$

## p进数的指对数

### 定义

利用展开式定义:

\$\$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+.....\$\$

s\ln x=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4+......\$\$

根据上文收敛和发散的定义,利用上面的升幂定理和素数在阶乘中的幂次,可以证得下面的结论。

## p为奇素数

此时的p进数中,仅当被p整除的数可以计算指数,被p除余1的数可以计算对数,即两种运算的收敛域。

#### 2进数

在2进数中,仅当被4整除的数可以计算指数,被4除余1的数可以计算对数。这比奇素数时要严格。

(其实所有奇数均可计算对数,均在对数收敛域内。但是全体被4除余3的数算出来的对数不满足后文的双射条件,算出的对数值再代入指数无法得到原数,而是它的相反数——被4除余1的数,因此不再讨论)

我们可以计算2进数下的\$e^4\$和\$\ln 5\$\[进而直观了解指对数:任意指数都是\$e^4\$的指数,利用换底公式可以转换成以5为底的对数,从而与前一篇缩系乘法群中以5为底的对数对比。

\$e^4\$的例子参见:

https://wiki.cvbbacm.com/ Printed on 2025/11/29 16:48

2025/11/29 16:48 5/6 素数幂次与p进数问题

OEIS A320815 Digits of the 2-adic integer exp(4).

OEIS A320814 Approximation of the 2-adic integer exp(4) up to 2^n.

\$\ln 5\$的例子参见:

OEIS A152228 2-adic expansion of log(5).

OEIS A321690 Approximations up to 2<sup>n</sup> for the 2-adic integer log(5).

注意,无论奇素数或2的情形□e和In2的相应p进数表示均无法计算,即落在收敛域外,找不到对应的表示。

### 定义的根据与意义

上面的定义依赖展开式,即只与多项式本身有关,不依赖于x的取值。因此,只用多项式理论即可证得, 这种定义满足性质:

互反性:用一个嵌套另一个,会得到1。即两种运算互逆。

乘加转换:对于任意的a和b□满足:

\$\$e^{a+b}=e^ae^b\$\$

 $s\ln a+\ln b$ 

因此指对数定义是完备的。借助公式:

 $s^0 = e^{b\ln a}$ 

可以定义任意二元幂运算,只要相应变量均落入指对数收敛域即可。同时借助换底公式可以计算任意二元对数,也要求落入收敛域。

这里的指对数与之前群论的指对数有何异同?之前群论中的指对数,要求幂次(指数)是普通的整数,只有底数和真数(幂)是取模意义下的。

这里p进数理论中的指对数,底数、指数(幂次)和幂(真数)均在p进数中。它建立了一个双射:模p □或4)余1的乘法,与模p□或4)余0的加法之间的双射。

## 素数在组合数中的幂次

组合数对一个数取模的结果,往往构成分形结构,例如著名的谢尔宾斯基三角形就可以通过组合数模2得到。

 $\sv_p(C_m^n) = \{S_p(n) + S_p(m-n) - S_p(m)\} \{p-1\}$ \$

如果仔细分析□p是否整除组合数其实和上下标在p进制下减法是否需要借位有关。这就有了下面的定理。

p在组合数\$C m^n\$中的幂次,恰好是p进制下m减掉n需要借位的次数。

特别地,组合数中2的幂次是:

 $$v_2(C_m^n)=S_2(n)+S_2(m-n)-S_2(m)$ 

## Lucas定理

结合上面"素数在组合数中的幂次"一同分析。上面的部分用于计算当组合数被p整除时,一共能被多少 个p整除(仅判断模p的幂是否为0);而这里则研究当组合数不被p整除时,模p余多少。

对于组合数,有同余式:

 $\C_{m_1p+m_2}^{n_1p+n_2} \operatorname{C_{m_1}^{n_1}C_{m_2}^{n_2} \bmod p$}$ 

至于到算法层面,还有与中国剩余定理结合的扩展卢卡斯算法□exlucas□□用于解决模p的幂的余数问题。 由于本文注重数学部分,这里不再讲解。

From: https://wiki.cvbbacm.com/ - CVBB ACM Team

Last update: 2020/06/08 22:03



https://wiki.cvbbacm.com/ Printed on 2025/11/29 16:48