

定理本身不讲了。直接上结论：

## 著名结论

设自然数  $a, b$  和整数  $n$  与  $a, b$  互素。考察不定方程：

$$ax + by = n$$

其中  $x$  和  $y$  为自然数。如果方程有解，称  $n$  可以被  $a, b$  表示。

记  $A = ab - a - b$  由  $a$  与  $b$  互素  $A$  必然为奇数。则有结论：

对任意的整数  $n$  与  $A - n$  中有且仅有一个可以被表示。

即：可表示的数与不可表示的数在区间  $[0, A]$  对称（关于  $A$  的一半对称）。 $0$  可被表示  $A$  不可被表示；负数不可被表示，大于  $A$  的数可被表示。

证明：

由于  $a, b$  互素，因此原方程有整数解。设解为：

$$\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at \end{cases}$$

其中  $t$  为整数。取适当的  $t$  使得  $y$  位于  $0$  到  $a-1$  之间。这只需在  $y_0$  上加上或减去若干个  $a$  即可得到这样的  $t$

第一步：证明大于  $A$  的数都可以被表示。当  $n$  大于  $A$  时：

$$ax = c - by > ab - a - b - by \geq ab - a - b - b(a-1) = -a$$

于是  $x$  也是非负整数。

第二步：证明  $A$  不可被表示，进而  $n$  与  $A - n$  不可能都被表示。

反证法。若  $ax + by = ab - a - b$  有非负整数解  $x, y$  则：

$$ab = a(x+1) + b(y+1)$$

由于  $a$  与  $b$  互素，所以  $a$  整除  $y+1$   $b$  整除  $x+1$   $a$  不超过  $y+1$   $b$  不超过  $x+1$  于是有：

$$ab = a(x+1) + b(y+1) \geq ab + ab = 2ab$$

矛盾！第二步证完。

第三步：证明如果  $n$  不可被表示，则  $A - n$  可被表示。

由上可知，若  $n$  不可被表示，由于上述方程中已规定  $y$  在  $0$  到  $a-1$  之间，则  $x$  为负。所以：

$$ab - a - b - ax - by = a(-x-1) + b(a-1-y)$$

显然  $-x-1$  和  $a-1-y$  均非负，于是  $A - n$  可被表示。

## 小于等于K 的能被表示的非负整数的数量

考虑mod B 意义下每个剩余系  $0 \cdots B - 1$  的最小能被表示的值是多少——大于他们的可以通过+kB 得到。

观察原方程A的若干倍数  $0, A, \cdots, (B - 1)A$  在mod B 意义下互不相同。这些数恰好是这些最小值。那么当  $K < AB$  时，小于等于K 的能被表示的非负整数的数量是：

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{K}{A} \rfloor} \lfloor \frac{K - iA}{B} \rfloor$$

这是一个非常经典的直线下整点问题，使用类欧几里得算法可以在  $O(\log \max(A,B))$  的时间内求解。因此我们得到了计算小于等于K 的能被表示的非负整数的数量的工具。

但是直线下整点（类欧几里得）不会。只能等待大佬完善了。

以下是例题。

## 题目

双城是一个一切都是双胞胎的地方，除了他们的硬币。他们使用两种硬币，其价值相当于A和B克黄金。那里的人很了解欧几里德算法，所以我们保证A和B的最大公约数是1。他们会告诉你为什么硬币系统是有效的：通过求解线性不定方程  $Ax + by = C$  每一个可能的整数C都会有一个结果。

但当它进入现实时，事情变得更加复杂。事实上，改变-换句话说，负的x或y-是很麻烦的，在双土地上的人根本不喜欢它。所以当有必要改变的时候，他们总是多付一点钱。

一个叫伊尼的骗子，住在一个地方，恨恶两个地方的人。他知道当没有合适的非负  $x, y$  作为C的价格时，人们会付出更多的代价，于是决定用这样不方便的价格来骗钱。他买了很多货，把它们送到了双人间土地，并以各种价格定价-当然，所有这些价格都是不方便的人在双重土地。

但是艾尼不是很聪明-也许这就是他现在不得不住在一个地方的原因。他发现很难计算出第K个最小的不公平价格。你能帮他吗？他愿意和你分享他从双面人那里骗取的钱！

第一行包含整数  $T, 1 \leq T \leq 10$  -测试用例数。

每个测试用例描述只包含一行三个整数  $A, B, K, 1 \leq A, B \leq 10^7, 1 \leq K \leq 10^18$  -两种硬币的值，以及所需的K

保证了  $\gcd(A, B) = 1$  且存在第K个最小不公平价格。

对于每个测试用例，在单独的一行上打印一个表示第K个最小不公平价格的整数。

## 样例

输入

2

2 3 1

314159 233333 123456789

输出

1

123570404

## 题解

本题利用了上述结论：给定值，判断是第几个。因此最终就是一个二分查找。二分一下就能解决原问题了。时间复杂度 $O(T \log \max(A,B) \log \min(K,AB))$ 可以通过 $A,B \leq 1018, T \leq 1000$ 的数据，也即本题原本的数据范围。

考虑到直线下整点是一个掏板子工作，因此放过了暴力。暴力可以这么写：假设 $A < B$ 我们尝试计算 $[kB, (k+1)B)$ 这一段里有多少可以被表达出来的，那其实就是 $\{(iA \bmod B) + kB \mid iA < (k+1)B\}$ 的集合大小，枚举 $iA$  计算确定答案在哪一段后，再在段内确定就好了——而段内有多少能被表达的已经被枚举了，打好标记for 一下就行了。时间复杂度 $O(T \max(A,B))$

```
#include<stdio.h>

long long solve(long long n, long long a, long long b, long long m)
{
    if(b==0)
    {
        return n*(a/m);
    }
    if(a>=m)
    {
        return n*(a/m)+solve(n,a%m,b,m);
    }
    if(b>=m)
    {
        return (n-1)*n/2*(b/m)+solve(n,a,b%m,m);
    }
    return solve((a+b*n)/m,(a+b*n)%m,m,b);
}

long long A,B,K;

void work()
{
    scanf("%lld%lld%lld",&A,&B,&K);
    long long l=1,r;
    r=(double)A*B>3e18?2e18+10:((long long)(2e18)+10<A*B-1?(long long)(2e18)+10:A*B-1);// double(A-1)*(B-1)/2>=K
    while(l<r)
    {
        long long mid=(l+r)/2;
        long long n=mid/A+1,m=B,a=mid-(n-1)*A+B,b=A;
        long long tot=solve(n,a,b,m)-1;
```

```
    long long cnt=mid-tot;
    if(cnt>=K)
    {
        r=mid;
    }
    else
    {
        l=mid+1;
    }
}
printf("%lld\n",l);
}

int main()
{
    int T;
    scanf("%d",&T);
    while(T--)
    {
        work();
    }
}
```

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: <https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:namespace: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:namespace: 2020/05/11 22:11 22:11 装桶定理与一次不定方程>

Last update: 2020/05/11 22:11