

定理本身不讲了。直接上结论：

著名结论

设自然数 a, b 和整数 n 与 a, b 互素。考察不定方程：

$$ax + by = n$$

其中 x 和 y 为自然数。如果方程有解，称 n 可以被 a, b 表示。

记 $C = ab - a - b$ 由 a 与 b 互素 C 必然为奇数。则有结论：

对任意的整数 n 与 $C - n$ 中有且仅有一个可以被表示。

即：可表示的数与不可表示的数在区间 $[0, C]$ 对称（关于 C 的一半对称）。 0 可被表示 C 不可被表示；负数不可被表示，大于 C 的数可被表示。

证明：

由于 a, b 互素，因此原方程有整数解。设解为：

$$\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at \end{cases}$$

其中 t 为整数。取适当的 t 使得 y 位于 0 到 $a-1$ 之间。这只需在 y_0 上加上或减去若干个 a 即可得到这样的 t

第一步：证明大于 C 的数都可以被表示。当 n 大于 A 时：

$$ax = n - by > ab - a - b - by \geq ab - a - b - b(a-1) = -a$$

于是 x 也是非负整数。

第二步：证明 C 不可被表示，进而 n 与 $C - n$ 不可能都被表示。

反证法。若 $ax + by = ab - a - b$ 有非负整数解 x, y 则：

$$ab = a(x+1) + b(y+1)$$

由于 a 与 b 互素，所以 a 整除 $y+1$ b 整除 $x+1$ a 不超过 $y+1$ b 不超过 $x+1$ 于是有：

$$ab = a(x+1) + b(y+1) \geq ab + ab = 2ab$$

矛盾！第二步证完。

第三步：证明如果 n 不可被表示，则 $C - n$ 可被表示。

由上可知，若 n 不可被表示，由于上述方程中已规定 y 在 0 到 $a-1$ 之间，则 x 为负。所以：

$$ab - a - b - ax - by = a(-x-1) + b(a-1-y)$$

显然 $-x-1$ 和 $a-1-y$ 均非负，于是 $C - n$ 可被表示。

几何意义

重新观察方程 $ax+by=n$ 将它看成一条直线。直线与两坐标轴在第一象限围成三角形。

当 n 小于 ab 的时候，这个直线在第一象限，至多只能通过一个整点。

根据上述讨论：当 n 可以被表示的时候，直线恰好经过一个整点；当 n 不可以被表示的时候，直线不经过整点（在第一象限）。

这结论也可以理解为：作三角形 $(0,0)(b,0)(0,a)$ 随着 n 从0不断增加，直线向右上方平移，整点会一个一个地通过直线，直到最后才撞上两个整点。

因此，小于等于 n 的能被表示的非负整数的数量，恰好就是直线 $ax+by=n$ （含）与两坐标轴（含）在第一象限围成三角形覆盖的整点个数。

（另一种解释）

考虑模 b 意义下每个剩余系中最小能被表示的值是多少——大于他们的可以通过增加若干个 b 得到。

观察原方程 a 的若干倍数 $0, a, \dots, (b-1)a$ 在 $\text{mod } b$ 意义下互不相同。这些数恰好是这些最小值。那么当 $n < ab$ 时，小于等于 n 的能被表示的非负整数的数量是：

$$\sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{n - ia}{b} \right\rfloor$$

这是一个非常经典的直线下整点问题，恰好是这条直线：

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{n}{b}$$

即 $ax+by=n$

（解释完）

使用类欧几里得算法可以在 $O(\log \max(a,b))$ 的时间内求解。因此我们得到了计算小于等于 n 的能被表示的非负整数的数量的工具。

但是直线下整点（类欧几里得）不会。只能等待大佬来完善了。

以下是例题。

题目

双城是一个一切都是双胞胎的地方，除了他们的硬币。他们使用两种硬币，其价值相当于 A 和 B 克黄金。那里的人很了解欧几里德算法，所以我们保证 A 和 B 的最大公约数是1。他们会告诉你为什么硬币系统是有效的：通过求解线性不定方程 $Ax+by=C$ 每一个可能的整数 C 都会有一个结果。

但当它进入现实时，事情变得更加复杂。事实上，改变-换句话说，负的 x 或 y -是很麻烦的，在双土地上的人根本就不喜欢它。所以当有必要改变的时候，他们总是多付一点钱。

一个叫伊尼的骗子，住在一个地方，恨恶两个地方的人。他知道当没有合适的非负 x 或 y 作为 C 的价格时，人们会付出更多的代价，于是决定用这样不方便的价格来骗钱。他买了很多货，把它们送到了双人间土地，并以各种价格定价-当然，所有这些价格都是不方便的人在双重土地。

但是艾尼不是很聪明-也许这就是他现在不得不住在一个地方的原因。他发现很难计算出第K个最小的不公平价格。你能帮他吗？他愿意和你分享他从双面人那里骗取的钱！

第一行包含整数 T ($1 \leq T \leq 10^4$)-测试用例数。

每个测试用例描述只包含一行三个整数 A, B, K ($1 \leq A, B \leq 10^7, 1 \leq K \leq 1018$)-两种硬币的值，以及所需的 K 。保证了 $\gcd(A, B) = 1$ 且存在第K个最小不公平价格。

对于每个测试用例，在单独的一行上打印一个表示第K个最小不公平价格的整数。

样例

输入

2

2 3 1

314159 233333 123456789

输出

1

123570404

题解

本题利用了上述结论：给定值，判断是第几个。因此最终就是一个二分查找。二分一下就能解决原问题了。时间复杂度 $O(T \log \max(A, B) \log \min(K, AB))$ 可以通过 $A, B \leq 1018, T \leq 1000$ 的数据，也即本题原本的数据范围。

考虑到直线下整点是一个掏板子工作，因此放过了暴力。暴力可以这么写：假设 $A < B$ 我们尝试计算 $[kB, (k + 1)B)$ 这一段里有多少可以被表达出来的，那其实就是 $\{(iA \bmod B) + kB \mid iA < (k + 1)B\}$ 的集合大小，枚举 iA 计算确定答案在哪一段后，再在段内确定就好了——而段内有多少能被表达的已经被枚举了，打好标记for 一下就行了。时间复杂度 $O(T \max(A, B))$

```
#include<stdio.h>

long long solve(long long n, long long a, long long b, long long m)
{
    if(b==0)
    {
        return n*(a/m);
    }
    if(a>=m)
    {
        return n*(a/m)+solve(n, a%m, b, m);
    }
    if(b>=m)
```

```
{
    return (n-1)*n/2*(b/m)+solve(n,a,b%m,m);
}
return solve((a+b*n)/m,(a+b*n)%m,m,b);
}

long long A,B,K;

void work()
{
    scanf("%lld%lld%lld",&A,&B,&K);
    long long l=1,r;
    r=(double)A*B>3e18?2e18+10:((long long)(2e18)+10<A*B-1?(long
long)(2e18)+10:A*B-1);// double(A-1)*(B-1)/2>=K
    while(l<r)
    {
        long long mid=(l+r)/2;
        long long n=mid/A+1,m=B,a=mid-(n-1)*A+b,b=A;
        long long tot=solve(n,a,b,m)-1;
        long long cnt=mid-tot;
        if(cnt>=K)
        {
            r=mid;
        }
        else
        {
            l=mid+1;
        }
    }
    printf("%lld\n",l);
}

int main()
{
    int T;
    scanf("%d",&T);
    while(T--)
    {
        work();
    }
}
```

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: <https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:namespace: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:namespace: 2020-2021:teams:namespace: 2020/05/11 22:55 裴蜀定理与一次不定方程>

Last update: 2020/05/11 22:55