

# Stirling数

## 总论

Stirling数是组合数学中两类很重要的数，分为第一类Stirling数和第二类Stirling数。

我先声明一下苏联式记法和美国式记法。对于组合数，苏联式记法是 $C_m^n$ 美国式记法是小括号里面上m下n，上下关系恰好与苏联式记法相反。虽然英美与西欧等大多通用美国式记法，但是俄罗斯以及东欧国家流行苏联式记法，并且我国的高中课本与高考也通用组合数的苏联式记法。

那么同样的，虽然Stirling数在西方有着类似的中括号与大括号的记法，我还是综合了国内的一些参考书，给了以下定义：

第一类Stirling数，记作小写字母 $s$ 加下角标1。即：

$$s_1(n,k)$$

第二类Stirling数，记作大写字母 $S$ 加下角标2。即：

$$S_2(n,k)$$

这样无论是常见的大小写，还是下角标形式记录的Stirling数，全都没有歧义。

一些书上认为第一类Stirling数是全正的，但是绝大多数书上认为第一类Stirling数有正有负。为了方便使用，我们这里的第一类Stirling数是有正有负的。如果对于极少数书上全正的定义，在这里视作第一类Stirling数的绝对值，即 $|s_1|$

## 第一类Stirling数

第一类Stirling数 $s_1(n,k)$ 和置换相关。

置换：1到n的一个排列。例如：645231是长度为6的一个置换。

显然全体长为n的轮换有 $n!$ 个。全体长为n的置换构成n元对称群。

置换的图：如果第i个位置上的数是j就从顶点i到j画有向边。

最终置换的图由若干个圈组成，不动点是由顶点指向自身的边构成长为1的圈。

长为k的轮换：对于单位置换1 2 ..... n将其中的k位接连打乱顺序，对应图论中一个长为k的圈。

置换可以看成不相交轮换的乘积。不动点也看作一个轮换。

一个置换恰含k个轮换：恰好可以写成k个不相交轮换的乘积，即图中恰好有k个连通分支。

给出绝对值的定义 $|s_1(n,k)|$ 是全体置换中，恰含k个轮换的置换个数。

符号的定义如下：

$$s_1(n,k) = (-1)^{n-k} |s_1(n,k)|$$

即当n与k的奇偶性相同为正，不同为负。

显然 $\sum |n!|$ 是带绝对值的第n行第一类Stirling数的和。有一个定理是说，如果不带绝对值，有正有负，那么除了第一行第一类Stirling数的和是1以外，其余的行第一类Stirling数的和全是0。

## 第二类Stirling数

第二类Stirling数与集合的划分有关。

给出定义 $S_2(n,k)$ 是把集合 $1, \dots, n$ 分成k个非空子集的划分个数。

## Bell数

Bell数与第二类Stirling数相关。第n个Bell数记作 $B_n$

Bell数和Bernoli数没什么关系，极少同时出现。我的习惯是将Bell数记作大写，将Bernoli数记作小写，或者提前声明是哪一种数。

本文中的 $B_n$ 全部都是Bell数，与Bernoli数无关。

给出定义 $B_n$ 是把集合 $1, \dots, n$ 分成非空子集的划分个数。

因此 $B_n$ 是第n行第二类Stirling数的和。

自0开始的Bell数：

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p_n$	1	1	2	5	15	52	203	877	4140

## 数表

研究组合数学，必须要有数表。

第一类Stirling数的数表如下：

下n右k	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
-4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-3	-6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-2	7	-3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-1	1	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	2	-3	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	-6	11	-6	1	0	0	0	0

5	0	0	0	0	0	24	-50	35	-10	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	-120	274	-225	85	-15	1	0	0
7	0	0	0	0	0	720	-1764	1624	-735	175	-21	1	0
8	0	0	0	0	0	-5040	13068	-13132	6769	-1960	322	-28	1

第二类Stirling数的数表如下：

下n右k	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
-4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-3	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-2	11	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	6	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	1	3	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	7	6	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1	15	25	10	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	31	90	65	15	1	0	0
7	0	0	0	0	0	1	63	301	350	140	21	1	0
8	0	0	0	0	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1

一些数感较好的人往往可以从数表中找到许多灵感。我们可以看到，第一类Stirling数的绝对值，增长速度比第二类Stirling数要快。

## 定义式

### 普通定义

首先限定下面几个式子的n的全体 $n_1$ 到 $n_k$ 为正整数，并且：

$$n_1+n_2+\dots+n_k=n$$

以下的和式中的求和号，指对满足条件的 $n_1$ 到 $n_k$ 全体求和。那么，根据上文的定义，直接写出：

$$s_1(n,k)=(-1)^n \frac{n!}{k!} \sum \frac{1}{n_1 n_2 \dots n_k}$$

$$S_2(n,k)=\frac{n!}{k!} \sum \frac{1}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

我们根据定义式就能清楚看出，第一类Stirling数的绝对值增长速度，比第二类Stirling数增长速度快。因为相同求和条件下相似的式子，第二类分母中是阶乘，而第一类是简单的数本身。

对于第二类Stirling数，自然可以配成多项式定理中的系数，可以联系多项式定理，最后可以解出这个较为简单的式子：

$$S_2(n,k)=\frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k C_k^j j^n (-1)^{k-j}$$

对于第一类Stirling数，没有解决办法。例如特例第二列，它恰好是调和级数部分和的分子（约分前）。记 $H_n$ 是第n个调和级数部分和：

$$H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

就有：

$$s_1(n, 2) = (-1)^n (n-1)! H_{n-1}$$

## 负下标

如果利用下文的递推式，强行推广至负下标，会得到这样的结论：

$$s_1(n, k) = (-1)^{n+k} S_2(-k, -n)$$

## 递推式

和组合数一样，在数表中Stirling数也由左上角的数和正上方的数求和得到。

但是Stirling数都是“右倾”的，即从正上方继承的数前方都带有一个系数，而左上方没有。具体的写就是：

第一类Stirling数继承了上方数的行数，带绝对值的时候是简单的求和，不带时要加负号：

$$s_1(n, k) = s_1(n-1, k-1) - (n-1)s_1(n-1, k)$$

第二类Stirling数继承了列数

$$S_2(n, k) = S_2(n-1, k-1) + kS_2(n-1, k)$$

这两个递推式是最重要的公式。

虽然每一列的通项难以解出，但是斜线方向的通项总是多项式量级的，利用数学归纳法就可以解出来。最边上的斜线全是1，内侧的斜线是简单的自然数和（第二类为正，第一类为负）。用组合恒等式可以递推地算出再往内侧的斜线：

$$s_1(n, n-2) = 3C_n^4 + 2C_n^3$$

$$S_2(n, n-2) = 3C_n^4 + C_n^3$$

$$s_1(n, n-3) = -15C_n^6 - 20C_n^5 - 6C_n^4$$

$$S_2(n, n-3) = 15C_n^6 + 10C_n^5 + C_n^4$$

$$s_1(n, n-4) = 105C_n^8 + 210C_n^7 + 130C_n^6 + 24C_n^5$$

$$S_2(n, n-4) = 105C_n^8 + 105C_n^7 + 25C_n^6 + C_n^5$$

可见，第t条斜线一定构成t-2次多项式，并且两类Stirling数的首项系数相同或相反（都是奇数的双阶乘）。

# 生成函数

## 指数型生成函数

因为上面列出的数表都是下三角形矩阵，所以对于每一行，长度都是有限的，而对于每一列，长度都是无限的。如果配上两个变元x与y就能写出二元的生成函数。

先看Bell数，Bell数是同行（固定n对全体k求和）第二类Stirling数的和。对于Bell数，有指数型生成函数。指数型生成函数就是每项下面要配一个阶乘，就像指数的展开式一样：

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = e^{e^x - 1}$$

展开成第二类Stirling数，就有以下两个式子：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_2(n,k)}{n!} x^n y^k = e^{y(e^x - 1)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_2(n,k)}{n!} x^n = \frac{1}{k!} (e^x - 1)^k$$

对于第一类Stirling数，也有类似的指数型生成函数：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_1(n,k)}{n!} x^n y^k = (1+x)^y$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_1(n,k)}{n!} x^n = \frac{1}{k!} (\ln(1+x))^k$$

为了方便，引入一个记号“阶乘的比”表示一种自变量为x的一元多项式：

$$\frac{x!}{(x-n)!} = x(x-1)\dots(x-n+1)$$

它是多项式，阶乘比只是一种形式上的记号，这里提前说明。

## 普通生成函数

对于第一类Stirling数，有按行的普通生成函数，直接配上系数，没有阶乘做分母：

$$\sum_{k=0}^n s_1(n,k) x^k = \frac{x!}{(x-n)!}$$

通过同样手法就知道，它的绝对值的生成函数有：

$$\sum_{k=0}^n |s_1(n,k)| x^k = \frac{(x+n-1)!}{(x-1)!}$$

因为都包含了模p的全体零点，无论带不带绝对值都有：

$$\sum_{k=0}^p s_1(p,k) x^k = \frac{x!}{(x-p)!} \equiv \sum_{k=0}^p |s_1(p,k)| x^k = \frac{(x+p-1)!}{(x-1)!} \equiv x^{p-x} \pmod p$$

也就是说，除了两端的第一类Stirling数，第p行中间的第一类Stirling数都被p整除。

第二类没有按行的结论，但有按列的结论：

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_2(n,k) x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\dots(1-kx)}$$

也有同余式：

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_2(n,p)x^n = \frac{x^p}{(1-x)(1-2x)\dots(1-px)} \equiv \frac{x^p}{1-x^{p-1}} \pmod{p}$$

## 矩阵的观点

接下来的阐述采用了矩阵“批量处理”的观点，来解释上一节的内容。

我们给出记法，数表构成的两个n阶方阵：

$$\{(s_1)\}_n$$

$$\{(S_2)\}_n$$

如果没有下角标，就默认为无穷阶阵。

上面这两个方阵是互逆的，乘在一起得到单位阵：

$$\{(s_1)\}_n \{(S_2)\}_n = I_n$$

因此下面的公式显然是成立的。

$$\sum_{k=1}^n S_2(n,k) \frac{x!}{(x-k)!} = x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{S_2(n,k)}{n!} x^n \frac{x!}{(x-k)!} = e^{xy}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n S_2(n,k) x^n \frac{x!}{(x-k)!} = \frac{1}{1-xy}$$

最后一个式子就是无穷大单位阵。

为什么互逆呢？这就要从矩阵的作用谈起。对于一元多项式F和G，如果它们之间存在着这样的关系：

$$G(x) = F(e^x - 1)$$

$$F(x) = G(\ln(1+x))$$

那么，对于它们第n项的系数f<sub>n</sub>和g<sub>n</sub>之间就应该满足这样的关系：

$$g_n = \sum_{k=0}^{\infty} S_2(n,k) f_k$$

$$f_n = \sum_{k=0}^{\infty} s_1(n,k) g_k$$

即原来的多项式也可以直接写出：

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} S_2(n,k) f_k x^n$$

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} s_1(n,k) g_k x^n$$

我们把多项式的系数看作列向量f和g，上面的等式就是熟知的矩阵左乘列向量。

$$g = (S_2)f$$

$$f = (s_1)g$$

无限大矩阵 $s_1$ 和 $S_2$ 的作用就很明显了。左乘一个 $s_1$ 代表将变元替换成为对数；左乘一个 $S_2$ 代表将变元替换成为指数。这就是上面绝大多数公式的统一。例如上文的指数型生成函数，以及下面的式子：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{n!} s_1(n,k) x^n y^k = \frac{1}{1-y \ln(1+x)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{n!} S_2(n,k) x^n y^k = \frac{1}{e^x - 1}$$

运用这个结论，几乎是显然的。我们还可以借此构造更多的实例，在此就不写了。

## Lucas定理

### 生成函数

考虑Lucas定理的证明，见[素数幂次与p进制问题](#)第七节。

$$C_{m_1 p + m_2}^{n_1 p + n_2} \equiv C_{m_1}^{n_1} C_{m_2}^{n_2} \pmod p$$

只用到了：

$$(x+1)^p \equiv x^p + 1 \pmod p$$

上文说，无论带不带绝对值都有：

$$\sum_{k=0}^p s_1(p,k) x^k \equiv x^p - x \pmod p$$

除了两端的第一类Stirling数，第 $p$ 行中间的第一类Stirling数都被 $p$ 整除。

所以完全同样的可以写出第一类Stirling数与绝对值的Lucas定理：

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n_1 p + n_2} s_1(n_1 p + n_2, k) x^k &\equiv x^{n_1} \{(x^{p-1} - 1)^{n_1} \sum_{k=0}^{n_2} s_1(n_2, k) x^k\} \\ &= x^{n_1} \sum_{t=0}^{n_1} (-1)^{n_1-t} C_{n_1}^t x^{(p-1)t} \sum_{k=0}^{n_2} s_1(n_2, k) x^k \pmod p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n_1 p + n_2} |s_1(n_1 p + n_2, k)| x^k &\equiv x^{n_1} \{(x^{p-1} - 1)^{n_1} \sum_{k=0}^{n_2} |s_1(n_2, k)| x^k\} \\ &= x^{n_1} \sum_{t=0}^{n_1} (-1)^{n_1-t} C_{n_1}^t x^{(p-1)t} \sum_{k=0}^{n_2} |s_1(n_2, k)| x^k \pmod p \end{aligned}$$

也有第二类Stirling数按列的Lucas定理。

$$\sum_{n=k_1 p + k_2}^{\infty} S_2(n, k_1 p + k_2) x^n \equiv \frac{x^{pk_1}}{(1-x^{p-1})^{k_1}} \sum_{n=k_2}^{\infty} S_2(n, k_2) x^n = x^{pk_1} \sum_{t=0}^{\infty} C_{k_1-1+t}^{k_1-1} x^{(p-1)t} \sum_{n=k_2}^{\infty} S_2(n, k_2) x^n \pmod p$$

对于第二类Stirling数，这个式子可以直接展开。记带余除法：

$$n - (k_1 p + k_2) = n_1(p-1) + n_2$$

其中 $n_2$ 取值为0到 $p-2$ 则有：

$$S_2(k_1+k_2+n_1(p-1)+n_2, k_1+k_2) = \sum_{t=0}^{n_1} C_{k_1+n_1-t}^{k_1-1} S_2(k_2+n_2+(p-1)t, k_2)$$

这是一个较复杂的卷积式，并不是一一对应的化归，但是总之将情况化归到了0到p-1列的某一行中。

## 奇偶性

对于第一类Stirling数，显然带不带绝对值奇偶性都是一样的，乘不乘-1奇偶性也是一样的。令n<sub>2</sub>为0或者是1：

$$\sum_{k=0}^{2n} s_1(2n, k) x^k \equiv x^n (x-1)^n \sum_{k=0}^0 s_1(0, k) x^k = x^n \sum_{t=0}^n C_n^t x^t \pmod{2}$$

$$\sum_{k=0}^{2n+1} s_1(2n+1, k) x^k \equiv x^n (x-1)^n \sum_{k=0}^1 s_1(1, k) x^k = x^{n+1} \sum_{t=0}^n C_n^t x^t \pmod{2}$$

也就是说，每一行前面一半全是偶数，后面一半与它一半的那一行组合数奇偶性相同。

对于第二类Stirling数，令k<sub>2</sub>是0或1。由于第0列只有0的位置是1，第1列从1开始全是1，所以：

$$S_2(2k_1+n, 2k_1) \equiv C_{k_1+n-1}^{k_1-1} \pmod{2}$$

$$S_2(2k_1+1+n, 2k_1+1) \equiv \sum_{t=0}^n C_{k_1+t-1}^{k_1-1} = C_{k_1+n}^{k_1} \pmod{2}$$

## 奇素数

接下来必须假设p不是2，即p是奇素数。由于只有第一类Stirling数有一一对应的化归，所以只研究第一类Stirling数。

二项式展开：

$$\sum_{k=0}^{n_1 p + n_2} s_1(n_1 p + n_2, k) x^k \equiv x^{n_1} (x^{p-1} - 1)^{n_1} \sum_{k=0}^{n_2} s_1(n_2, k) x^k = x^{n_1} \sum_{t=0}^{n_1} (-1)^{n_1-t} C_{n_1}^t x^{(p-1)t} \sum_{k=0}^{n_2} s_1(n_2, k) x^k \pmod{p}$$

$$\sum_{k=0}^{n_1 p + n_2} |s_1(n_1 p + n_2, k)| x^k \equiv x^{n_1} (x^{p-1} - 1)^{n_1} \sum_{k=0}^{n_2} |s_1(n_2, k)| x^k = x^{n_1} \sum_{t=0}^{n_1} (-1)^{n_1-t} C_{n_1}^t x^{(p-1)t} \sum_{k=0}^{n_2} |s_1(n_2, k)| x^k \pmod{p}$$

我们知道n<sub>2</sub>不超过p即化归后到了前p-1行。原来一行的前n<sub>1</sub>个数（0到n<sub>1</sub>-1）都被p整除。

观察式中组合数部分。组合数部分每两项之间距离是p-1但是后面k跑遍的部分是0到p-1有p个数，会不会造成重叠？

不会。因为第一类Stirling数数表的形状：前p-1行中，只有第0行在第0列有数1，其余行在第0列都没有数（为0）；但是第0行，也只有第0列有数1，在其余列都没有数。这就保证它们可以按照p-1的周期重复而不重叠。

为了方便讨论，将以上区分为第0行和1到p-1行两种情况，即整除与不整除两种情况。

当n<sub>2</sub>等于0时：

$$\sum_{k=0}^{n_1} s_1(n_1, k) x^k \equiv \sum_{k=0}^{n_1} |s_1(n_1, k)| x^k \equiv x^{n_1} \sum_{t=0}^{n_1} \{(-1)\}^{n_1-t} C_{n_1}^{t} x^{(p-1)t} \pmod p$$

即p的n<sub>1</sub>倍数行，前n<sub>1</sub>个数（0到n<sub>1</sub>-1）被p整除，从第n<sub>1</sub>个数开始后面每p-1个数中p-1是偶数，因此奇偶性相同）才有一个不被p整除，并且与第n<sub>1</sub>行对应的组合数（配上-1的系数）同余。即仅当k-n<sub>1</sub>是p-1倍数时不被p整除：

$$k - n_1 = k_1(p-1)$$

则有：

$$s_1(n_1, n_1 + k_1(p-1)) \equiv \{(-1)\}^{n_1 - k_1} C_{n_1}^{k_1} \pmod p$$

当n<sub>2</sub>不等于0时，前n<sub>1</sub>个数（0到n<sub>1</sub>-1）仍旧被p整除。于是这里认为k至少为n<sub>1</sub>（将k-n<sub>1</sub>原来k属于靠右的n-n<sub>1</sub>列）做带余除法，只是除数换成p-1有：

$$k - n_1 = k_1(p-1) + k_2$$

这里规定k<sub>2</sub>的取值范围是1到p-1与通常的带余除法略有不同。由于k不超过n而n有这个式子：

$$n - n_1 = n_1(p-1) + n_2$$

这里n<sub>2</sub>的范围是0到p-1因此k<sub>1</sub>不超过n<sub>1</sub>则有：

$$s_1(n_1 + n_2, n_1 + k_1(p-1) + k_2) \equiv \{(-1)\}^{n_1 - k_1} C_{n_1}^{k_1} s_1(n_2, k_2) \pmod p$$

$$|s_1(n_1 + n_2, n_1 + k_1(p-1) + k_2)| \equiv \{(-1)\}^{n_1 - k_1} C_{n_1}^{k_1} |s_1(n_2, k_2)| \pmod p$$

即从n<sub>1</sub>开始，第k<sub>1</sub>个连续p-1化归到了第一类Stirling数第n<sub>2</sub>行的1到p-1位置，以及组合数的第n<sub>1</sub>行的k<sub>1</sub>位置。这样就完成了递归。绝对值可以去掉是因为保证了同样的奇偶性。

## 例题

第一类Stirling数绝对值同行部分和余数问题。求第一类斯特林数的绝对值n行l到r项和%p

圆神现在正在解决一个有趣的任务，它给出四个整数n, l, r和p并询问：

$$\sum_{k=l}^r |s_1(n, k)| \pmod p$$

其中p是质数。似乎圆神在一分钟内就想出了主旨。你能快点吗？

输入唯一一行包含四个整数n, l, r和p(1 ≤ n ≤ 10<sup>18</sup>, 0 ≤ l ≤ r ≤ n, 2 ≤ p ≤ 10<sup>6</sup>, p是质数)。

输出一个表示答案的整数。

## 题解

显然可以拆成两个从0开始的同行部分和的差。不妨记前m项为：

$$\sum_{k=0}^m |s_1(n_1p+n_2, k)|$$

这一行给定了，仍旧可以设n比p大，于是可以化归到比p小的部分：

$$n = n_1p + n_2$$

这里n<sub>1</sub>和n<sub>2</sub>都相当于给定了。根据上文第一类Stirling数的Lucas定理，前n<sub>1</sub>个数全都模p余0，即当m小于n<sub>1</sub>的时候部分和全部为0，事实上只需要观察后半部分的部分和。

首先，右边两部分可以分开求和。类似于上文的k设m也有相关的式子：

$$m - n_1 = m_1(p-1) + m_2$$

当n<sub>2</sub>为0的时候，对m-n<sub>1</sub>是简单的带余除法：

$$\sum_{k=0}^m |s_1(n_1p, k)| \equiv \sum_{k_1=0}^{m_1} (-1)^{n_1-k_1} C_{n_1}^{k_1} \pmod p$$

当n<sub>2</sub>不为0的时候，对m-n<sub>1</sub>是特殊的带余除法，余数m<sub>2</sub>取值1到p-1

$$\sum_{k=0}^m |s_1(n_1p+n_2, k)| = \sum_{k_1=0}^{m_1-1} \sum_{k_2=1}^{p-1} |s_1(n_1p+n_2, n_1+k_1(p-1)+k_2)| + \sum_{k_2=1}^{m_2} |s_1(n_1p+n_2, n_1+m_1(p-1)+k_2)| \pmod p$$

$$\sum_{k=0}^m |s_1(n_1p+n_2, k)| \equiv \sum_{k_1=0}^{m_1-1} (-1)^{n_1-k_1} C_{n_1}^{k_1} \sum_{k_2=1}^{p-1} |s_1(n_2, k_2)| + (-1)^{n_1-m_1} C_{n_1}^{m_1} \sum_{k_2=1}^{m_2} |s_1(n_2, k_2)| \pmod p$$

同一行第一类Stirling数绝对值部分和，恰好是行数的阶乘。即：

$$\sum_{k=0}^m |s_1(n_1p+n_2, k)| \equiv n_2! \sum_{k_1=0}^{m_1-1} (-1)^{n_1-k_1} C_{n_1}^{k_1} + (-1)^{n_1-m_1} C_{n_1}^{m_1} \sum_{k_2=1}^{m_2} |s_1(n_2, k_2)| \pmod p$$

这里n<sub>2</sub>总比p要小，因此阶乘不会被消掉。最后问题的关键在组合数的部分。

对k<sub>2</sub>和n<sub>2</sub>进行枚举，范围仍旧都是0到p-1因此关键在左边n<sub>1</sub>和k<sub>1</sub>的部分。

$$(-1)^{n_1} \sum_{k_1=0}^{m_1-1} C_{n_1}^{k_1} (-1)^{k_1}$$

最后化归为简单的Lucas定理的问题，给定n<sub>1</sub>计算多项式取模意义下的值：

$$\sum_{k_1=0}^{m_1-1} C_{n_1}^{k_1} x^{k_1}$$

即二项式展开的部分和问题，见[素数幂次与p进数问题](#)第七节。

# 代码

```
#include<stdio.h>

int MOD;

long long powmod(long long x,int k)
{
    long long ans=1;
    while(k)
    {
        if(k&1)
        {
            ans=ans*x%MOD;
        }
        x=x*x%MOD;
        k>>=1;
    }
    return ans;
}

int getfact(int x,int *p)
{
    int t=x,sz=0;
    int i;
    for(i=2;i*i<=t;i++)
    {
        if(x%i==0)
        {
            p[++sz]=i;
            while(x%i==0)
            {
                x/=i;
            }
        }
    }
    if(x>1)
    {
        p[++sz]=x;
    }
    return sz;
}

long long facd[1000005],facv[1000005];
long long G,mi[1000005],inv[1000005];

void pre()
{
    facd[0]=1;
    int i;
```

```
for(i=1;i<MOD;i++)
{
    facd[i]=facd[i-1]*i%MOD;
}
facv[MOD-1]=facd[MOD-1];
for(i=MOD-2;i>=0;i--)
{
    facv[i]=facv[i+1]*(i+1)%MOD;
}
int prime[10];
int sz=getfact(MOD-1,prime);
for(G=1;;G++)
{
    bool ok=1;
    for(i=1;i<=sz;i++)
    {
        if(powmod(G,(MOD-1)/prime[i])==1)
        {
            ok=0;
            break;
        }
    }
    if(ok)
    {
        break;
    }
}
mi[0]=1;
for(i=1;i<MOD-1;i++)
{
    mi[i]=mi[i-1]*G%MOD;
}
inv[1]=1;
for(i=2;i<MOD;i++)
{
    inv[i]=(MOD-MOD/i)*inv[MOD%i]%MOD;
}
}

long long C(long long n,long long m)
{
    return (n<m)?0:facd[n]*facv[m]%MOD*facv[n-m]%MOD;
}

long long calc(long long n,long long m)
{
    if(!m)
    {
        return 1;
    }
}
```

```

}
if(n<m)
{
    return 0;
}
return C(n%MOD,m%MOD)*calc(n/MOD,m/MOD)%MOD;
}

long long query(long long n,long long m)
{
    m=(n<m)?n:m;
    long long s=0;
    int i;
    for(i=0;i<MOD-1;i++)
    {
        int x=mi[i];
        if(x+n>MOD)
        {
            continue;
        }
        if(!i)
        {
            s=(s+(m+1)*facd[x+n-1]%MOD*facv[x-1])%MOD;
        }
        else
        {
            s=(s+(mi[(MOD-1-i*(m+1)%(MOD-1))%(MOD-1)]-1LL)*inv[mi[MOD-1-i]-1LL]%MOD*facd[x+n-1]%MOD*facv[x-1])%MOD;
        }
    }
    s=(MOD-s)%MOD;
    if(n==MOD-1)
    {
        s=(s-1LL+MOD)%MOD;
    }
    return s;
}

long long solve(long long n,long long m)
{
    long long u1=n/MOD,v1=n%MOD;
    if(m<u1)
    {
        return 0;
    }
    m-=u1;
    long long u2=m/(MOD-1),v2=m%(MOD-1);
    long long s=0;
    if(u2)
    {
        s=(s+(((u2-1)&1)?MOD-1:1)*calc(u1-1,u2-1)%MOD*query(v1,MOD-2))%MOD;
    }
}

```

```
}
s=(s+((u2&1)?MOD-1:1)*calc(u1,u2)%MOD*query(v1,v2))%MOD;
if(v1==MOD-1&&u2)
{
    s=(s+(((u2-1)&1)?MOD-1:1)*calc(u1-1,u2-1))%MOD;
}
return s*((u1&1)?MOD-1:1)%MOD;
}

int main()
{
    long long n,l,r;
    scanf("%lld%lld%lld%d",&n,&l,&r,&MOD);
    pre();
    long long s1=solve(n,r);
    long long s2=solve(n,l-1);
    printf("%lld\n",(s1-s2+MOD)%MOD);
    return 0;
}
```

From:  
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:  
<https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:namespace:stirling%E6%95%B0&rev=1596636842> 

Last update: **2020/08/05 22:14**