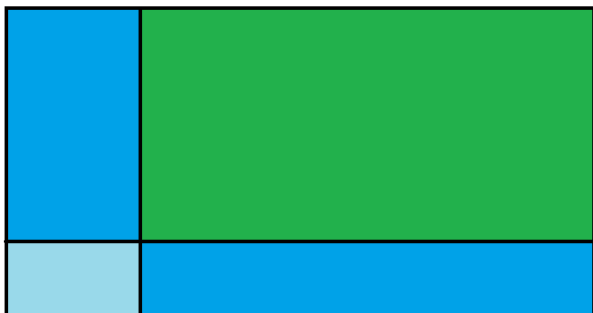


# 前缀和

一些情况下，对数组的子区间和进行多次询问，遍历是一个费时的行为，前缀和在这里就很有用。

## 多维前缀和



在一个二维数组中要求一个方形区域的和。这里同样可以运用前缀和。  
 例如这张图，求绿色部分，就可以用整个减去横侧和纵侧的条，再加上被减两次的块。  
 三维数组中同理，只是算式略不同。就是容斥定理的应用。  
 但是随着维度t变高，计算前缀和的容斥的复杂度是 $2^t$ 总复杂度达到了 $O(n^t \times 2^t)$

以三维为例：

```
for(int i=1;i<=n;i++)
  for(int j=1;j<=m;j++)
    for(int k=1;k<=p;k++)
      b[i][j][k]=b[i-1][j][k]+b[i][j-1][k]+b[i][j][k-1]
        -b[i-1][j-1][k]-b[i-1][j][k-1]-b[i][j-1][j-1]
          +b[i-1][j-1][k-1]+a[i][j][k];
```

我们其实有个更好的办法

```
for(int i=1;i<=n;i++)
  for(int j=1;j<=m;j++)
    for(int k=1;k<=p;k++)
      a[i][j][k]+=a[i-1][j][k];
for(int i=1;i<=n;i++)
  for(int j=1;j<=m;j++)
    for(int k=1;k<=p;k++)
      a[i][j][k]+=a[i][j-1][k];
for(int i=1;i<=n;i++)
  for(int j=1;j<=m;j++)
    for(int k=1;k<=p;k++)
      a[i][j][k]+=a[i][j][k-1];
```

$a_1[i][j][k]=\sum_{l=1}^k a[l][j][k]$  quad  $a_2[i][j][k]=\sum_{l=1}^j a_1[i][l][k]$  quad  $a_3[i][j][k]=\sum_{l=1}^i a[l][j][l]$   
 $a_3$ 数组即为所求，更高维度同理  
 就是说按维每一维加一遍。这样做可以将复杂度降至 $O(n^t \times t)$ 维数较高的情况下会节省一些时

间。

## 例子

### 1.

数字列表项目给定一个  $n \times n$  的矩阵，找一个最大的子矩阵，使得这个子矩阵里面的元素和最大。

最朴素的想法是枚举左下角、右上角并在内部枚举每个元素，复杂度  $O(n^6)$  利用前缀和降至  $O(n^4)$

好一点的想法是枚举上下边，中间的矩阵就成了一维数列，变成求最大区间和的问题，达到  $O(n^3)$

### 2.

输入一个长度为  $n$  的数组  $a[i]$  下标从 0 开始 (0 到  $n-1$ ) 保证  $n$  是 2 的整数次幂，对于每个  $i (0 \leq i < n)$  求所有满足  $i \& j = j$  的  $a[j]$  之和  $n \leq 2^{20}$

例如  $n = 2^{10}$  就可以将每一个  $i$  根据 2 进制形式视作具有 10 维，所求即为其前缀和。利用上面所说的方法容易实现。

代码

---

## 总结

一个基础技巧。

From:  
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:  
[https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:no\\_morning\\_training:%E5%89%8D%E7%BC%80%E5%92%8C&rev=1589381022](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:no_morning_training:%E5%89%8D%E7%BC%80%E5%92%8C&rev=1589381022)

Last update: 2020/05/13 22:43