

树链剖分

用输入法打这个词永远联想不出来
用于处理有根树上路径问题

原理

对于有根树 $tree$ 不妨定义它的树根为 1

对于每棵子树，定义它的 $size[i] = \sum_{j \in son[i]} size[j] + 1$

我们定义重儿子 $hson[i]$ ，使得 $size[hson[i]] = size(deep[son[i]])$

即重儿子有最大的子树的儿子

显然，从任意一个点不断选择重儿子向下，最终可以到达叶，这条路径称为重链
从任意点到它的轻儿子的边称为轻链

记录 $top[i]$ 为 i 只经过重链向上可以到达的最高的点

记录dfs序 $dfn[i]$ ，这个dfs序先遍历重儿子。那么，每一条重链在dfs序中是连续的

那么，对于路径 (i, j) ，将它拆为 $(i, lca(i, j), j)$

$lca(i, j)$ 必然是 i 的祖先(显然)

路径 $(i, lca(i, j))$ 必然包含若干条重链和相同数量(± 1) 的轻链

由于每条重链在dfs序中是连续的一段，所以可以用线段树等结构区间修改

轻链上的点单点修改

就能够维护树上路径了

复杂度证明

只证明从 i 到根之多需要经过 $O(\log_2 n)$ 条轻链

对于边 (i, j) j 是 i 的轻儿子，有 $size[i] \geq size[j] * 2$

所以经过一条轻链，子树大小至少翻倍。得证

实现

dfs两遍。dfs1 求出 $father$ $size$ $hson$ 以及其他信息(如果需要，比如depth)

dfs2 求出 top dfn

一点细节

求lca

树上路径必然需要lca

求 $lca(i, j)$:

不妨令 $depth[i] > depth[j]$ (不满足就交换)

调整 $i = father[top[i]]$ ，(此时如果不满足 $depth[i] > depth[j]$ 则再交换)

直到 $\text{top}[i] == \text{top}[j]$ 。这时 i, j 中 depth 较小者即为 $\text{lca}(i, j)$

正确性证明略去


下期预告

树剖要求这颗树是有根并且静态的

如果树需要换根，加点，删点，请使用 [lct](#)

如果需要在此基础上求子树信息()，请使用 [toptree](#)

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:no_morning_training:fayuanyu:pou&rev=1589362959 

Last update: **2020/05/13 17:42**