

内容中例题中涉及到了不定维数的前缀和，可否拿出来单独讲一下？嗯还是不用讲了。。

# 前缀和

一些情况下，对数组的子区间和进行多次询问，遍历是一个费时的行为，前缀和在这里就很有用。

## 多维前缀和



在一个二维数组中要求一个方形区域的和。这里同样可以运用前缀和。  
 例如这张图，求绿色部分，就可以用整个减去横侧和纵侧的条，再加上被减两次的块。  
 三维数组中同理，只是算式略不同。就是容斥定理的应用。  
 但是随着维度t变高，计算前缀和的容斥的复杂度是  $2^t$  总复杂度达到了  $O(n^t \times 2^t)$

以三维为例：

```

for(int i=1;i<=n;i++)
  for(int j=1;j<=m;j++)
    for(int k=1;k<=p;k++)
      b[i][j][k]=b[i-1][j][k]+b[i][j-1][k]+b[i][j][k-1]
        -b[i-1][j-1][k]-b[i-1][j][k-1]-b[i][j-1][j-1]
          +b[i-1][j-1][k-1]+a[i][j][k];

```

我们其实有个更好的办法

```

for(int i=1;i<=n;i++)
  for(int j=1;j<=m;j++)
    for(int k=1;k<=p;k++)
      a[i][j][k]+=a[i-1][j][k];
for(int i=1;i<=n;i++)
  for(int j=1;j<=m;j++)
    for(int k=1;k<=p;k++)
      a[i][j][k]+=a[i][j-1][k];
for(int i=1;i<=n;i++)
  for(int j=1;j<=m;j++)
    for(int k=1;k<=p;k++)
      a[i][j][k]+=a[i][j][k-1];

```

$$s_{a_1}[i][j][k] = \sum_{l=1}^i a[l][j][k]$$

$$s_{a_2}[i][j][k] = \sum_{l=1}^j a_1[i][l][k]$$

$$s_{a_3}[i][j][k] = \sum_{l=1}^k a_2[i][j][l]$$
 a3数组即为所求，更高维度同理

就是说按维每一维加一遍。这样做可以将复杂度降至 $O(n^t \times \text{timest})$ 维数较高的情况下会节省一些时间。

## 例子

### 1.

数字列表项目给定一个  $n \times n$  的矩阵，找一个最大的子矩阵，使得这个子矩阵里面的元素和最大。

最朴素的想法是枚举左下角、右上角并在内部枚举每个元素，复杂度  $O(n^6)$  利用前缀和降至

$O(n^4)$

好一点的想法是枚举上下边，中间的矩阵就成了一维数列，变成求最大区间和的问题，达到  $O(n^3)$

### 2.

输入一个长度为  $n$  的数组  $a[i]$  下标从 0 开始 (0 到  $n-1$ ) 保证  $n$  是 2 的整数次幂，对于每个  $i (0 \leq i < n)$  求所有满足  $i \& j = j$  的  $a[j]$  之和  $n \leq 2^{20}$

例如  $n = 2^{10}$  就可以将每一个  $i$  根据 2 进制形式视作具有 10 维，所求即为其前缀和。利用上面所说的方法容易实现。

### 链接

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long ll;
const int N=(1<<21);
ll a[N];
int n;
int main()
{
    scanf("%d",&n);
    for(int i=0;i<n;i++)
        scanf("%lld",&a[i]);
    for(int i=1,p=0;i<n;i<=<=1)
    {
        p++;
        for(int j=0;j<n;j++)
            if((j&(1<<p-1)))
                a[j]+=a[(j^(1<<p-1))];
    }
    for(int i=0;i<n;i++)
        printf("%lld\n",a[i]);
    return 0;
}
```

## 总结

一个基础技巧。

## 参考

<https://www.cnblogs.com/mrclr/p/8423136.html>

<https://www.cnblogs.com/Miracevin/p/9778266.html>

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: [https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:no\\_morning\\_training:shaco:%E7%9F%A5%E8%AF%86%E7%82%B9:%E5%9F%BA%E7%A1%80:%E5%89%8D%E7%BC%80%E5%92%8C&rev=1591106752](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:no_morning_training:shaco:%E7%9F%A5%E8%AF%86%E7%82%B9:%E5%9F%BA%E7%A1%80:%E5%89%8D%E7%BC%80%E5%92%8C&rev=1591106752)

Last update: 2020/06/02 22:05