

生成函数

前言

用以解决一类问题:几类物品各自可以取的数目具有一定的限制，求共取*i*种的方案数。

概念

对于数列 $a_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 它的生成函数即为 $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

常见类型

这里介绍的是一种将*x*限定在 $(-1, 1)$ 的范围内化简的结果(*x*本身也没有意义，可以添加一些设定)，这样的简化结果利于后面的计算，而且与不化简的记过表达的意义是相同的

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^{ik} = \frac{1}{1-x^k} \quad \sum_{i=0}^n x^{ik} = \frac{1-x^{(n+1)k}}{1-x^k} \quad \sum_{i=0}^{\infty} C_{i+k-1}^{k-1} x^i = \frac{1}{(1-x)^k}$$

解决问题

将取不同物品的方案的生成函数相乘，得到的函数中 x^i 的系数即是共取*i*个物品的方案数。

通常通过化简约分的方式得到一个形状比较好的化简的生成函数，再将其还原为数列的表达方式，通过组合数学的方法计算系数。

看一个例子

我们要从苹果、香蕉、橘子和梨中拿一些水果出来，要求苹果只能拿偶数个，香蕉的个数要是5的倍数，橘子最多拿4个，梨要么不拿，要么只能拿一个。问按这样的要求拿*n*个水果的方案数。苹果的生成函数是 $\frac{1}{1-x^2}$ 香蕉的生成函数是 $\frac{1}{1-x^5}$ 橘子的生成函数是 $\frac{1-x^5}{1-x}$ 梨的生成函数是 $(1+x)$

将它们相乘得到 $\frac{1}{(1-x)^2}$ 即为 $1+2x+3x^2+\dots$ 因此取*n*个水果的方案数就是*n*+1

例题

先贴一个吧 [洛谷p2000 拯救世界](#)

From: <https://wiki.cvvbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: https://wiki.cvvbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:no_morning_training:shaco:%E7%9F%A5%E8%AF%86%E7%82%B9:%E6%95%B0%E8%AE%BA:%E7%94%9F%E6%88%90%E5%87%BD%E6%95%B0

Last update: 2020/05/28 08:34