生成函数

前言

用以解决一类问题:几类物品各自可以取的数目具有一定的限制，求共取i种的方案数。

概念

对于数列$a_{n}=\{a_1,a_2,⋯,a_n\}$□它的生成函数即为$f(x)={a_1x+a_2x^2+⋯+a_nx^n}$□

常见类型

这里介绍的是一种将x限定在(-1,1)的范围内化简的结果□x本身也没有意义，可以添加一些设定），这样的简化结果利于后面的计算，而且与不化简的记过表达的意义是相同的□
\[\sum_{i=0}^{\infty}{x^{ik}}=\frac{1}{1-x^k}\] \[\sum_{i=0}^{n}{x^{ik}}=\frac{1-x^{(n+1)k}}{1-x^k}\] \[\sum_{i=0}^{\infty}{C_{i+k-1}^{k-1}}{x^i}=\frac{1}{(1-x)^k}\]

解决问题

将取不同物品的方案的生成函数相乘，得到的函数中x^i的系数即是共取i个物品的方案数。

看一个例子

我们要从苹果、香蕉、橘子和梨中拿一些水果出来，要求苹果只能拿偶数个，香蕉的个数要是5的倍数，橘子最多拿4个，梨要么不拿，要么只能拿一个。问按这样的要求拿n个水果的方案数。 苹果的生成函数是$\frac{1}{1-x^2}$□香蕉的生成函数是$\frac{1}{1-x^5}$□橘子的生成函数是$\frac{1-x^5}{1-x}$□梨的生成函数是$(1+x)$□
将它们相乘得到$\frac{1}{(1-x)^2}$□即为$1+2x+3x^2+⋯$□因此取n个水果的方案数就是n+1□

例题

先贴一个吧 洛谷p2000 拯救世界