

AC自动机

一、基础知识

1. 基本思想

AC自动机可用于解决多模式串匹配问题。该类问题的一般做法如下：

Step1: 读入模式串构造 trie

Step2: 对 trie 的每个节点构造失配指针 fail **trie 图 fail 树是重点**

Step3: 匹配如果失配，跳 fail 边，类似 kmp

2. fail 树的构建

设结点 u 的 fail 指针指向节点 v 它表示 v 所代表的字符串是 u 代表的字符串的最长后缀。我们按照 trie 树的 bfs 序求 fail 指针。考虑字典树中当前的节点 u 的父节点是 p p 通过字符 c 的边指向 u 由于按照 bfs 序求解，深度小于 u 的所有节点的 fail 指针都已求得。考虑 $fail[p]$

- 如果结点 $fail[p]$ 通过字符 c 连接到的子结点 w 存在，那么令 $fail[u]=w$ 使用反证法容易证明 $fail[p]+c$ 满足要求。
- 否则，找到 $fail[fail[p]]$ 指向的结点，重复上述判断过程，一直跳 fail 直到根节点。若仍不存在，令 $fail[u]=$ 根节点。

二、模板

```
#include<iostream>
#include<cstdio>
#include<cstring>
#include<string>
#include<queue>
#include<algorithm>
#include<cmath>
using namespace std;
const int MAX=1e6,TYPE=26;
struct ac_automation{
    int trie[MAX][TYPE],num[MAX],tot,fail[MAX];
    void readin(char * a)
    {
        int k=strlen(a),now=0;
        for(int i=0;i<k;i++)
        {
            if(!trie[now][a[i]-'a'])
                trie[now][a[i]-'a']=++tot;
        }
    }
};
```

```
        now=trie[now][a[i]-'a'];
    }
    num[now]++;
}
void getfail()
{
    queue<int> q;
    memset(fail,0,sizeof(fail));
    for(int i=0;i<TYPE;i++)
        if(trie[0][i])
            q.push(trie[0][i]);
    while(!q.empty())
    {
        int k=q.front();
        q.pop();
        for(int i=0;i<TYPE;i++)
            if(trie[k][i])
            {
                fail[trie[k][i]]=trie[fail[k]][i];
                q.push(trie[k][i]);
            }
            else
                trie[k][i]=trie[fail[k]][i]; // (1) 重点: 构造fail图
    }
}
int find(char *s)
{
    int ans=0,p=0;
    for(int i=0;s[i];i++)
    {
        p=trie[p][s[i]-'a'];
        // 看似是沿着trie走了一步, 实际上已经开始失配跳fail了, 见(1)
        for(int j=p;j and ~num[j];j=fail[j])    ans+=num[j],num[j]=-1;
        // 查找相同后缀, 防止漏查, 如abcd匹配{abcd,cd} 防止漏查cd
    }
    return ans;
}
}ac;
char str[MAX],tem[MAX];
int main()
{
    int k;
    scanf("%d",&k);
    for(int i=1;i<=k;i++)
    {
        scanf("%s",tem);
        ac.readin(tem);
    }
    scanf("%s",str);
```

```

    ac.getfail();
    printf("%d",ac.find(str));
    return 0;
}

```

三、例题与技巧

1. [POI2000]病毒

题意：给出多个01串，判断是否存在一个无限长的01串，使得给出的01串都不是它的子串。

分析与题解：利用给定的01串构造自动机，显然，只要判断是否存在一个01串能够在这个自动机上无限跑下去。即能否在这个fail图上找到一个环，使得0节点在这个环上，并且环上无“危险节点”（即给出的01串的末尾节点）。注意这个危险节点，如果一个点通过fail边直接或者间接的指向一个危险节点，那么它也是个危险节点（利用fail的性质：一个节点A的fail指针指向的节点B，实际上B所代表的字符串是A代表的字符串的最长后缀）。

在建图建fail边的时候，更新节点的危险属性，即如果 $fail[i]$ 危险，那么 i 也危险。随后dfs找环即可。

2. AC自动机+树上差分

在进行多模式串匹配的时候，一般情况下可以暴力跳fail边，但是这样做在一些题目中会被卡掉，此时记录自动机上的每个状态被匹配了几次，最后求出每个模式串在Trie上的终止节点在fail树上的子树总匹配次数可以优化。详情见【模板AC自动机（二次加强版）】。

3. 阿狸的打字机（fail树）

题意：给出总长度数量级为 10^5 的多个字符串， 10^5 次询问，每次询问 (x,y) 返回第 x 个字符串在第 y 个字符串里出现的次数。

分析与题解：利用fail的性质：一个节点A的fail指针指向的节点B，实际上B所代表的字符串是A代表的字符串的最长后缀，所以如果某个节点A，其fail指针直接或者间接（多次跳fail的指向B的结束节点，则显然字符串B是A所代表字符串的后缀，则B为A的子串。所以，这里将fail边反向，所有fail边就变成了fail树（每个fail边最终都会走到节点0，且每个fail边（正向）只会指向深度小于本身的点，所以构成树结构），于是只要检查B节点的子树中，有多少属于A节点，即可得出B在A中出现过多少次。

于是，一个字符串问题被我们变成了子树查询问题，利用树的dfs序，这个问题就变成了简单的单点插入区间求和，这里有个小问题就是此时要离线计算，保证每一个字符串只插入一次，否则多次插入相同的字符串导致tle。

4. [JSOI2007]文本生成器（dp）

题意：给定 $N(N \leq 60)$ 个由大写字母组成的单词（每个单词长度小于100），并给出一个长度 $M(M \leq 100)$ ，求出有多少个长度为 M 的字符串，至少包含一个单词。

分析与题解：求方案数，想到dp至少包含，可以先求出不符合要求的字符串，最后用总方案数减去不可行的方案数。

此时题目转化为，有多少长度为 M 的字符串不包含所有给定的单词，看起来是不是和病毒那题很像？但这题不再是无限长，而且要求求出方案数，考虑一个十分套路的dp

$$dp[i,j] \rightarrow dp[i+1,trie[j].ch[k]]$$

代表当前长度为 i 时，已经匹配到 j 节点的方案数。主要判断危险节点，要绕开（关于危险节点，见1.[POI2000]病毒）

再次注意，这个dp方程看似与 fail 边无关，但是我们在建立 fail 图的过程中，对于 trie 树中添加了許多不存在的边，构成了 fail 图，所以我们在图上跑dp实际上已经在跳 fail 了，fail 数组只是在匹配后缀，实际上 trie 图也是由 fail 数组构造的。

这类dp经常与矩阵快速幂结合，见下题。

5. POJ2778(矩阵快速幂)

题意：给定 m 个长度不超过 10 的由 ATCG 组成的字符串，求出长度为 n 的不包含这些给定字符串的串数量。其中 $m \leq 10, n \leq 2e9$

分析：是不是看起来和上一题差不多？是不是想用dp看看数据范围，清醒了吗？正常的dp显然不现实。

现在我们换一个角度，从图的角度来看这个问题，fail 图

我们再来看看上一题写出的状态转移方程，实质上等价于从根节点开始转移，转移 i 次，并且保证不经过危险节点的方案数。再看看数据范围，模式串的长度个数与构成字母都很少，但 n 却很大，那么我们将 fail 图去掉危险节点，是不是我们只要求根节点走 n 步到达 j 节点的方案数就可以了？好了，这题的 trie 图实际上特别小，将 trie 图用邻接矩阵储存，这题就变成了矩阵快速幂；求出 A^n 最后的答案就是 $\sum A^n[0,i]$

6. HDU2243(矩阵快速幂)

题意：给定 m 个长度不超过 5 的字符串，求出长度不超过 n 的至少包含一个给定字符串的串数量。其中 $m \leq 6, n < 2^{31}$

题解 $\text{ans} = S_n - T_n$

和上一题很像，但是却要求和，于是我们改造一下矩阵：

$$\begin{pmatrix} A & E \\ 0 & E \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} T_n \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{n+1} \\ A \end{pmatrix}$$

其中A为 trie 图的邻接矩阵。

7. HDU2825(状压dp)

题意:求长度为 n 包含至少 k 个模式串的字符串数量。

题解:好了,现在变成了至少 k 个,而不是至少一个,我们上面惯用的取反手段失效了。老老实实正面硬刚:子集问题,考虑状压dp

$$dp[i + 1][trie[j][x]][K | num[trie[j][x]]] += dp[i][j][K];$$

$dp[i][j][k]$ 表示当前走到了字符串的第 i 位,位于 trie 的第 j 个节点上,此时已经匹配的模式串是 k (子集状压)。

可以看出这个实际上就是之前最简单的那个dp上加了一维信息,维护子集而已。

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:too_low:ac_automaton&rev=1590922643

Last update: 2020/05/31 18:57