

2020.05.11-2020.05.17 周报

团队训练

2020.05.13 2019 Multi-University Training Contest 1 prob: 3:5:13 rnk[]141/?

[20200513比赛记录](#)

wzx27

找了点杂题和构造题

1 [Divisor Paths](#)

给一个很大的数 \$D\$，把 \$D\$ 的所有因子作为顶点建图，对于两个点 \$x, y\$，若他们之间满足 \$\frac{y}{x}\$ 是一个质数，则它们之间有一条权为 \$\frac{y}{x}\$ 的边。\$q\$ 个询问，求两个点之间的最短路。

考虑把每个数用它的所有质因子写成一个向量，按题目的意思，每个点可以通过某一维加 \$1\$ 减 \$1\$ 实现移动。然后易证，任意两点的最短路构造方法为 \$a \rightarrow \text{gcd}(a,b) \rightarrow b\$。

2 [Square Subsets](#)

给一个集合(不是严格意义上的集合，不需要互异性)，可以生产 \$2^n\$ 个子集，求有多少个子集，把子集中每个数乘起来能得到一个完全平方数。

题解给的是 \$\text{dp}\$ 从另一个角度想，把每个数的所有质因子写成一个向量，每一维的取值是 \$0\$ 或者 \$1\$，表示幂次的偶数和奇数。然后我们会发现两个数相乘，在质因子的奇偶性上相当于一个二进制异或，所以原问题等价于有几个子集通过上述表示后异或值为 \$0\$。那么我们就可以用线性基来解决这个问题，求出线性基的个数为 \$m\$，原向量组的个数为 \$n\$，则异或值为 \$0\$ 的个数就是 \$2^{\{n-m\}}\$。

3 [Colorful Blocks](#)

\$n\$ 个连续的方块，染成最多 \$m\$ 种颜色，问相邻块颜色相同的数量不超过 \$k\$ 个的染色种数。

一开始想到是 \$\text{dp}\$ 很容易想到一个 \$O(n^2)\$ 的转移 \$f[i][j] = (m-1) \times f[i-1][j] + f[i-1][j-1]\$，然后发现转移过程和 \$j\$ 无关，推一下发现有点像杨辉三角，最后可以化简为一个式子。如果直接从组合数学的角度考虑，直接的解法就是对于仅有 \$i\$ 个相邻方块颜色相同时，即取 \$i-1\$ 个断点，然后从左往右扫一遍就得到答案 \$\sum_{i=0}^k m \times C_{n-1}^i \times (m-1)^{n-i-1}\$。

4 [Walk on Matrix](#)

供消遣的构造题

5 [Sum of squares of divisors](#)

定义函数 \$\sigma_2(x) \mapsto x\$ 所有因数的平方和，求 \$\sum_{i=1}^n \sigma_2(i)\$ 对 \$m\$ 取模，其中 \$n=10^{15}, m=10^9\$。

考虑每个因数 \$k\$ 的贡献 \$k^2\$，那么原式 = \$\sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor\$。

```
\times i^2 = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{\sqrt{n+1}} \rfloor} (\lfloor \frac{n}{\sqrt{n+1}} \rfloor - \lfloor \frac{n}{\sqrt{n+i}} \rfloor) + \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} (f(\lfloor \frac{n}{\sqrt{n+1}} \rfloor) - f(\lfloor \frac{n}{\sqrt{n+i+1}} \rfloor))
```

其中 $f(k) = \sum_{i=1}^k i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

Infinity37

专题

[后缀自动机](#) 好题推荐/广义后缀自动机待填坑

比赛

无

题目

[b-operation](#)

[f-typewriter](#)

Zars19

题目

[D-Vacation](#)

比赛

[AtCoder Beginner Contest 155](#)

很久之前的`ABC`的题的确画风不太一样。前三题都很简单，从后面说起

D. Pairs

给出一个长度 N 的数组，问两两乘积的第 K 大。

题解：第 K 大的乘积是正数、负数、零很容易计算得出，然后对于正负数的情况分别进行二分，结果在 $[-10^{18}, 10^{18}]$ 中`check`过程中对每个数字`lower_bound`计算对小于等于 mid 的乘积数的贡献。正数的情况要注意每组被计算两次，以及数字与自己本身的乘积不能计入。另外各种取整要想清楚。

E. Payment

给出\$N\$在\$1\$到\$10^{1,000,000}\$之间，可以使用\$10\$的整数幂面值的纸币，如果你的支付大于\$N\$店员会找给你多余的钱，问你和店员使用的纸币张数总和的最小值。

题解：用 $\text{dp}[i][0]$ 和 $\text{dp}[i][1]$ 分别表示在第*i*位付正好的钱和多付1个单位的钱的最小张数。只要想到表示方式状态转移方程就也很好想，从高位到低位扫一遍。

F. Perils in Parallel

\$N\$个炸弹处在坐标轴上，给出每个炸弹的坐标和状态\$A_i, B_i\$，状态为\$1\$表示激活\$0\$表示非激活\$M\$项可选操作，每项操作\$l_i, r_i\$表示将坐标处在这个区间的炸弹状态反转。问有没有没有一个操作集可以使得所有炸弹状态为\$0\$。

题解：定义操作\$O_i\$为反转坐标在\$i\$及以前所有炸弹的状态，将炸弹状态\$w\$数组进行异或差分，操作\$O_i\$相当于仅改变\$w_{i+1}\$。题中操作可以分解成\$O_{l_i-1}\$和\$O_{r_i}\$。将\$l_i\$和\$r_i+1\$两点之间连边（lower_bound查找后），反转时一次要同时改变两个端点的状态，故图中每一连通块中状态为\$1\$的点需要是偶数个，如不是则不可能。若符合则必有可能的方案，用任意生成树，由叶子节点到根判断是否需要反转即可。

本周推荐

[Square Subsets](#):感觉把奇偶的转化关系变成异或很有意思，加上这周练的多校有个线性基的题，可以积累一下——wzx27

[HDU6583 TypeWriter](#):这题一贴出来，就知道，老没做题了（别骂了），但是这道题目确实比较有意思，后缀自动机优化dp如果搞懂了这道题目会让后缀自动机的使用灵活程度upup避免只会写后缀自动机模板题的尴尬场面——Infinity37

[abc155 E. Payment](#):是赛时没有想出的题目，但代码很短，思路很简单。是神奇dp思维题——Zars19

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:wangzai_milk:weekly2&rev=1589772389

Last update: 2020/05/18 11:26

