

2020.06.01-2020.06.07 周报

团队训练

_wzx27

1.指数生成函数

常用于解决一类多重集合计数的问题

设 S 是多重集合 $\{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \dots, n_k \cdot a_k\}$ 其中 $n_1, n_2, \dots, n_k$ 是非负整数。设 h_n 是 S 的 n 排列数。那么数列 $h_0, h_1, \dots, h_n, \dots$ 的指数生成函数 $g^{(e)}(x)$ 由下式给出 $g^{(e)}(x) = f_{u_1}(x) f_{u_2}(x) \cdots f_{u_k}(x)$ 其中，对于 $i=1, 2, \dots, k$ 有 $f_{u_i}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n_i}}{n_i!}$

又因为 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$ 所以这类因子相乘有很好的性质，便于求解最后的生成函数。

POJ3734

用红、蓝、绿、黄四种颜色给 $1 \times n$ 的方块染色，红色和绿色方块的数目必须是偶数。

那么蓝黄的因子为 $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = e^x$ 红绿的因子为 $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 所以生成函数为 $g^{(e)}(x) = e^{2x} (\frac{e^x + e^{-x}}{2})^2 = \frac{e^{4x} + 2e^{2x} + 1}{4}$ 从而展开后 $n > 1$ 时 $\frac{x^n}{n!}$ 的系数为 $\frac{4^{n+2} - 2^{n+1}}{4}$

POJ1322

c 种无限集合，任意选取 n 个，相同类型的元素出现两个时就会一起消失，问最后剩下 m 个的概率是多少。

范围: $c \leq 100, n, m \leq 1e6$

可以概率dp 但好像很麻烦？

考虑生成函数的做法，就是有 m 个集合取了奇数次，另外 $c-m$ 个集合取了偶数次。

$$\begin{aligned} g^{(e)}(x) &= (\frac{e^x - e^{-x}}{2})^m \cdot (\frac{e^x + e^{-x}}{2})^{c-m} \\ &= 2^{-c} \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} \binom{m}{i} e^{ix} e^{-(m-i)x} \cdot \sum_{j=0}^{c-m} \binom{c-m}{j} e^{jx} e^{-(c-m-j)x} \end{aligned}$$

然后暴力 $O(c^2 \log n)$ 就可以求每一对 (i, j) 对 $\frac{x^n}{n!}$ 的系数的贡献 $(-1)^{m-i} \binom{m}{i} \binom{c-m}{j} (2i+2j-c)^n$

```
#include<iostream>
#include<algorithm>
#include<iomanip>
```

```
#define ll long long
#define pii_ pair<int,int>
#define mp_ make_pair
#define pb push_back
#define fi first
#define se second
#define rep(i,a,b) for(int i=(a);i<=(b);i++)
#define per(i,a,b) for(int i=(a);i>=(b);i--)
#define show1(a) cout<<#a<<" = "<<a<<endl
#define show2(a,b) cout<<#a<<" = "<<a<<" ; "<<#b<<" = "<<b<<endl
using namespace std;
const ll INF = 1LL<<60;
const int inf = 1<<30;
const int maxn = 2e5+5;
inline void fastio() {ios::sync_with_stdio(false);cin.tie(0);cout.tie(0);}

double qpow(double a,ll b) {double
s=1;while(b){if(b&1)s=s*a;a=a*a;b>>=1;}return s; }
int c,n,m;
double C[105][105];
int main()
{
    fastio();
    rep(i,0,100) C[i][0]=1;
    rep(i,1,100) rep(j,1,i) C[i][j] = C[i-1][j-1]+C[i-1][j];
    while(cin>>c && c){
        cin>>n>>m;
        if(m>c||m>n||(n-m)&1) {cout<<"0.000"<<endl;continue;}
        double ans = 0.0;
        rep(i,0,c-m){
            rep(j,0,m){
                double t = 1.0*(2*i+2*j-c)/c;
                if((m-j)&1) ans -= qpow(t,n)*C[c-m][i]*C[m][j];
                else ans += qpow(t,n)*C[c-m][i]*C[m][j];
            }
        }
        ans *= 1.0*C[c][m]/qpow(2,c);
        cout<<setprecision(3)<<ans<<endl;
    }
    return 0;
}
```

2.生成函数与多项式

有时候生成函数没那么好求的时候就要用多想是全家桶

[P4389付公主的背包](#)

\$n\$ 中物品，每个物品体积为 \$v_i\$ 求恰好装下体积为 \$1\sim m\$ 的种数。

数据范围 \$\{n,m \leq 1e5\}\$

这种题也算是生成函数的经典应用

首先得到生成函数 $f(x) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1-x^{v_i}}$

两边取对数得
$$\begin{aligned} \ln f(x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j \cdot v_i}{j} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{v_i|k} \frac{v_i}{k} x^k \end{aligned}$$

\$O(n \log n)\$ 预处理出 \$k\$ 的所有因子，然后多项式 \$\text{Exp}\$ 求 \$e^{\ln f(x)}\$ 即可。

```
#include<bits/stdc++.h>
#define ll long long
#define pii_ pair<int,int>
#define mp_ make_pair
#define pb push_back
#define fi first
#define se second
#define rep(i,a,b) for(int i=(a);i<=(b);i++)
#define per(i,a,b) for(int i=(a);i>=(b);i--)
#define show1(a) cout<<#a<<" = "<<a<<endl
#define show2(a,b) cout<<#a<<" = "<<a<<" ; "<<#b<<" = "<<b<<endl
using namespace std;
const ll INF = 1LL<<60;
const int inf = 1<<30;
const int maxn = 4e5+5;
const ll M = 998244353;
inline void fastio() {ios::sync_with_stdio(false);cin.tie(0);cout.tie(0);}
ll qpow(ll a,ll b) {ll
s=1;while(b){if(b&1)s=(s*a)%M;a=(a*a)%M;b>>=1;}return s; }
int n,m,cnt[maxn],r[maxn];
ll A[maxn],B[maxn],tmp[maxn],t1[maxn],t2[maxn],t3[maxn];
vector<int> g[maxn];
void init()
{
    int n = 1e5;
    rep(i,1,n){
        for(int j=i;j<=n;j+=i) g[j].pb(i);
    }
}
void add(ll &x,ll y)
{
    x+=y;if(x<0) x+=M;if(x>M) x-=M;
}
void NTT(ll a[],int lim,int type)
{
    rep(i,0,lim-1) if(i<r[i]) swap(a[i],a[r[i]]);
    for(int mid=1;mid<lim;mid<=<1){
        ll wn = qpow(3,(M-1)/mid/2);
```

```
        if(type== -1) wn = qpow(wn,M-2);
        for(int R=mid<<1,j=0;j<lim;j+=R){
            ll w = 1;
            for(int k=0;k<mid;k++,w=w*wn%M){
                ll x=a[j+k],y=w*a[j+mid+k]%M;
                a[j+k] = (x+y)%M;
                a[j+mid+k] = (x-y+M)%M;
            }
        }
    }
    if(type== -1){
        ll inv = qpow(lim,M-2);
        rep(i,0,lim) a[i]=a[i]*inv%M;
    }
}

void PolyMul(ll a[],ll b[],int n,int m)
{
    int lim=1,l=0;
    while(lim<=n+m) lim<<=1,l++;
    rep(i,1,lim) r[i] = (r[i]>>1)>>1 | ((i&1)<<(l-1));
    NTT(a,lim,1);NTT(b,lim,1);
    rep(i,0,lim) a[i] = a[i]*b[i]%M;
    NTT(a,lim,-1);
}

void PolyInv(int n,ll a[],ll b[])
{
    if(n==1) {b[0]=qpow(a[0],M-2);return ;}
    PolyInv((n+1)>>1,a,b);
    int lim=1,l=0;
    while(lim<2*n) lim<<=1,l++;
    rep(i,1,lim-1) r[i] = (r[i]>>1)>>1 | ((i&1)<<(l-1));
    rep(i,0,n-1) tmp[i] = a[i];
    rep(i,n,lim) tmp[i] = 0;
    NTT(tmp,lim,1);NTT(b,lim,1);
    rep(i,0,lim){
        b[i] = (2-tmp[i]*b[i]%M+M)%M*b[i]%M;
    }
    NTT(b,lim,-1);
    rep(i,n,lim) b[i]=0;
}

void PolyDf(int n,ll a[],ll b[])
{
    rep(i,0,n) b[i] = a[i+1]*(i+1)%M;
}

void PolyItg(int n,ll a[],ll b[])
{
    rep(i,1,n) b[i] = a[i-1]*qpow(i,M-2)%M;b[0]=0;
}

void PolyLn(int n,ll a[],ll b[])
```

```

{
    PolyDf(n,a,t1);
    PolyInv(n,a,t2);
    PolyMul(t1,t2,n,n);
    PolyItg(n,t1,b);
}
void PolyExp(int n,ll a[],ll b[])
{
    if(n==1) {b[0]=1;return ;}
    PolyExp((n+1)>>1,a,b);
    int lim=1,l=0;
    while(lim<2*n) lim<=<=1,l++;
    rep(i,0,lim) t1[i]=t2[i]=0;
    PolyLn(n,b,t3);
    rep(i,1,lim) r[i] = (r[i>>1]>>1) | ((i&1)<<(l-1));
    rep(i,1,n-1) t3[i] = (a[i]-t3[i]+M)%M;
    t3[0] = (1+a[0]-t3[0]+M)%M;
    rep(i,n,lim) b[i]=t3[i]=0;
    NTT(t3,lim,1);NTT(b,lim,1);
    rep(i,0,lim) b[i] = b[i]*t3[i]%M;
    NTT(b,lim,-1);
    rep(i,n,lim) b[i] = 0;
}
int main()
{
    fastio();
    init();
    cin>>n>>m;
    int x;
    rep(i,1,n) {cin>>x;cnt[x]++;}
    rep(i,0,m){
        ll inv = qpow(i,M-2);
        for(int x:g[i]) if(cnt[x]) add(A[i],cnt[x]*x%M*inv%M);
    }
    PolyExp(m+1,A,B);
    rep(i,1,m) cout<<B[i]<<endl;
    return 0;
}

```

Infinity37

Zars19

本周推荐

Last
update:
2020/06/09 2020-2021:teams:wangzai_milk:weekly6 https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:wangzai_milk:weekly6&rev=1591713182
22:33

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - **CVBB ACM Team**

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:wangzai_milk:weekly6&rev=1591713182 

Last update: **2020/06/09 22:33**