置换的定义

设X是有限集。不失一般性，取X为有前n个正整数组成的集合$\{1,2,\ldots,n\}$□X的**置换**$i_1,i_2,\ldots,i_n$可以看成是X到自身的一一映射，其定义为□ $$f:X\to X$$ 其中$$f(1)=i_1,f(2)=i_2,\ldots,f(n)=i_n$$ 为了强调其可视性，常用$2\times n$的阵列来表示这个置换，如□ $$\left(\begin{array}{c} 1 &2 &\ldots &n\\i_1 &i_2 &\ldots &i_n\end{array} \right)$$

置换群的定义

把有n个元素的集合$\X={1,2,\ldots,n\}$的所有$n!$个置换构成的集合记为S_n□则如果S_n中的非空子集G满足如下三条性质，则定义它为X的**置换群**： (1)合成运算的封闭性□$\forall f,g\in G,f\circ g\in G$ (2)单位元□S_n中的恒等置换$\iota \in G$ (3)逆元的封闭性□$\forall f\in G,f^{-1}\in G$

特别的S_n是一个置换群，称它为n阶对称群，仅有一个恒等置换的集合$G=\{\iota \}$也是一个置换群。

置换群都满足消去律□ $$f\circ g=f\circ h \; \leftrightarrow \; g=h$$ 因为用f^{-1}左乘等式两端，并通过结合律，则得证

置换的幂运算

参考文献: * 《2005信息学国家集训队论文：置换群快速幂运算 研究与探讨》——潘震皓*

对任意置换T□可对其进行循环分解，如 $$f=\left (\begin{array}{c} 1&2&3&4&5&6&7&8\\6&8&5&4&1&3&2&7\end{array}\right)=[1\;6\;3\;5]\circ[2\;8\;7]\circ[4]$$ 显然有如下性质：对置换T□$T^k=\iota$的最小正整数解为T中所有循环长度的最小公倍数

对置换的整幂运算T^n□感觉用快速幂$O(nlogk)$就行惹（~~其实是因为论文中的$O(n)$算法没看懂~~

对置换的分数幂运算（开方）就很有意思了 分两种情况： 循环长度和指数互质：