

### 置换的定义

设 $X$ 是有限集。不失一般性，取 $X$ 为有前 $n$ 个正整数组成的集合 $\{1,2,\dots,n\}$ 。 $X$ 的置换 $f: X \rightarrow X$ 可以看成是 $X$ 到自身的一一映射，其定义为 $f: X \rightarrow X$  其中 $f(1)=i_1, f(2)=i_2, \dots, f(n)=i_n$  为了强调其可视性，常用 $n \times n$ 的阵列来表示这个置换，如 $\left( \begin{array}{c} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{array} \right)$

### 置换群的定义

把有 $n$ 个元素的集合 $X = \{1, 2, \dots, n\}$ 的所有 $n!$ 个置换构成的集合记为 $S_n$ 。则如果 $S_n$ 中的非空子集 $G$ 满足如下三条性质，则定义它为 $X$ 的置换群：(1)合成运算的封闭性 $\forall f, g \in G, f \circ g \in G$  (2)单位元 $\iota \in S_n$ 中的恒等置换 $\iota \in G$  (3)逆元的封闭性 $\forall f \in G, f^{-1} \in G$

特别的 $S_n$ 是一个置换群，称它为 $n$ 阶对称群，仅有一个恒等置换的集合 $G = \{\iota\}$ 也是一个置换群。

置换群都满足消去律 $f \circ g = f \circ h \implies g = h$  因为用 $f^{-1}$ 左乘等式两端，并通过结合律，则得证

### 置换的幂运算

参考文献: 《2005信息学国家集训队论文：置换群快速幂运算 研究与探讨》——潘震皓

对任意置换 $T$ 可对其进行循环分解，如 $f = \left( \begin{array}{c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 6 & 3 & 5 & 2 & 8 & 7 & 4 \end{array} \right) = [1; 6; 3; 5] \circ [2; 8; 7] \circ [4]$  显然有如下性质：对置换 $T$ 的 $T^k = \iota$ 的最小正整数解为 $T$ 中所有循环长度的最小公倍数

对置换的整幂运算 $T^n$ 感觉用快速幂 $O(n \log k)$ 就行惹（~~其实是因为论文中的 $O(n)$ 算法没看懂~~

对置换的分数幂运算（开方）就很有意思了 分两种情况：循环长度和指数互质：

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: [https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:wangzai\\_milk:wzx27:combinatorial\\_mathematics:permutaitiongroup&rev=1590423848](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:wangzai_milk:wzx27:combinatorial_mathematics:permutaitiongroup&rev=1590423848)

Last update: 2020/05/26 00:24