

# 理论

## 置换的定义

设  $X$  是有限集。不失一般性，取  $X$  为有前  $n$  个正整数组成的集合  $\{1, 2, \dots, n\}$   $X$  的置换  $i_1, i_2, \dots, i_n$  可以看成是  $X$  到自身的一一映射，其定义为  $f: X \to X$  其中  $f(1)=i_1, f(2)=i_2, \dots, f(n)=i_n$  为了强调其可视性，常用  $2 \times n$  的阵列来表示这个置换，如  $\left( \begin{array}{c} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{array} \right)$

## 置换群的定义

把有  $n$  个元素的集合  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  的所有  $n!$  个置换构成的集合记为  $S_n$  则如果  $S_n$  中的非空子集  $G$  满足如下三条性质，则定义它为  $X$  的置换群：(1) 合成运算的封闭性  $\forall f, g \in G, f \circ g \in G$  (2) 单位元  $\iota \in S_n$  中的恒等置换  $\iota \in G$  (3) 逆元的封闭性  $\forall f \in G, f^{-1} \in G$

特别的  $S_n$  是一个置换群，称它为  $n$  阶对称群，仅有一个恒等置换的集合  $G = \{\iota\}$  也是一个置换群。

置换群都满足消去律  $f \circ g = f \circ h \implies g = h$  因为用  $f^{-1}$  左乘等式两端，并通过结合律，则得证

## 置换的幂运算

参考文献: 《2005 信息学国家集训队论文：置换群快速幂运算 研究与探讨》——潘震皓

对任意置换  $T$  可对其进行循环分解，如  $f = \left( \begin{array}{c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 6 & 3 & 5 & 2 & 8 & 7 & 4 \end{array} \right) = [1; 6; 3; 5] \circ [2; 8; 7] \circ [4]$  显然有如下性质：对置换  $T, T^k = \iota$  的最小正整数解为  $T$  中所有循环长度的最小公倍数

特别地，当  $T$  为单循环时，则  $T^k = \iota$  的最小正整数解为  $T$  的循环长度  $l$

对置换的整幂运算  $T^n$  感觉用快速幂  $O(n \log k)$  就行（其实是因为论文中的算法没看懂

对置换的分数幂运算（开方）分两种情况：

循环长度和指数互质：

## 题目

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: [https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:wangzai\\_milk:wzx27:combinatorial\\_mathematics:permutaitiongroup&rev=1590673702](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:wangzai_milk:wzx27:combinatorial_mathematics:permutaitiongroup&rev=1590673702)

Last update: 2020/05/28 21:48