

## 理论

### 置换的定义

设 $X$ 是有限集。不失一般性，取 $X$ 为有前 $n$ 个正整数组成的集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 。 $X$ 的置换 $i_1, i_2, \dots, i_n$ 可以看成是 $X$ 到自身的一一映射，其定义为 $f: X \rightarrow X$ 。其 $f(1) = i_1, f(2) = i_2, \dots, f(n) = i_n$ 。为了强调其可视性，常用 $n \times n$ 的阵列来表示这个置换，如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$

### 置换群的定义

把有 $n$ 个元素的集合 $X = \{1, 2, \dots, n\}$ 的所有 $n!$ 个置换构成的集合记为 $S_n$ 。则如果 $S_n$ 中的非空子集 $G$ 满足如下三条性质，则定义它为 $X$ 的置换群：(1)合成运算的封闭性 $\forall f, g \in G, f \circ g \in G$ ；(2)单位元 $\iota \in S_n$ 中的恒等置换 $\iota$ ；(3)逆元的封闭性 $\forall f \in G, f^{-1} \in G$ 。

特别的 $S_n$ 是一个置换群，称它为 $n$ 阶对称群，仅有一个恒等置换的集合 $G = \{\iota\}$ 也是一个置换群。

置换群都满足消去律 $f \circ g = f \circ h \Leftrightarrow g = h$ 。因为用 $f^{-1}$ 左乘等式两端，并通过结合律，则得证。

### 置换的幂运算

参考文献：《2005信息学国家集训队论文：置换群快速幂运算研究与探讨》——潘震皓

对任意置换 $T$ 可对其进行循环分解，如 $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} = [1; 6; 3; 5] \circ [2; 8; 7] \circ [4]$ 。显然有如下性质：对置换 $T$ ， $T^k = \iota$ 的最小正整数解为 $T$ 中所有循环长度的最小公倍数。

特别地，当 $T$ 为单循环时，则 $T^k = \iota$ 的最小正整数解为 $T$ 的循环长度 $|T|$ 。

对置换的整幂运算 $T^n$ 感觉用快速幂 $O(n \log k)$ 就行（其实是因为论文中的算法没看懂）。

对置换的分数幂运算（开方）分两种情况：

循环长度和指数互质：

## 题目

From:  
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:  
[https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:wangzai\\_milk:wzx27:combinatorial\\_mathematics:permutationgroup&rev=1590673702](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:wangzai_milk:wzx27:combinatorial_mathematics:permutationgroup&rev=1590673702)

Last update: 2020/05/28 21:48

