

理论

置换的定义

设 X 是有限集。不失一般性，取 X 为有前 n 个正整数组成的集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 。 X 的置换 i_1, i_2, \dots, i_n 可以看成是 X 到自身的一一映射，其定义为 $f: X \rightarrow X$ 其中 $f(1)=i_1, f(2)=i_2, \dots, f(n)=i_n$ 为了强调其可视性，常用 $2 \times n$ 的阵列来表示这个置换，如 $\left(\begin{array}{c} 1 \ 2 \ \dots \ n \\ i_1 \ i_2 \ \dots \ i_n \end{array} \right)$

置换群的定义

把有 n 个元素的集合 $X = \{1, 2, \dots, n\}$ 的所有 $n!$ 个置换构成的集合记为 S_n 则如果 S_n 中的非空子集 G 满足如下三条性质，则定义它为 X 的置换群：(1)合成运算的封闭性 $\forall f, g \in G, f \circ g \in G$ (2)单位元 $\exists \text{在 } S_n \text{ 中的恒等置换 } \iota \in G$ (3)逆元的封闭性 $\forall f \in G, f^{-1} \in G$

特别的 S_n 是一个置换群，称它为 n 阶对称群，仅有一个恒等置换的集合 $G = \{\iota\}$ 也是一个置换群。

置换群都满足消去律 $f \circ g = f \circ h \implies g = h$ 因为用 f^{-1} 左乘等式两端，并通过结合律，则得证

置换的幂运算

参考文献：《2005信息学国家集训队论文：置换群快速幂运算 研究与探讨》——潘震皓

对任意置换 T 可对其进行循环分解，如 $f = \left(\begin{array}{c} 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \\ 6 \ 8 \ 5 \ 4 \ 1 \ 3 \ 2 \ 7 \end{array} \right) = [1 \ 6 \ 3 \ 5] \circ [2 \ 8 \ 7] \circ [4]$ 显然有如下性质：对置换 T $T^k = \iota$ 的最小正整数解为 T 中所有循环长度的最小公倍数

特别地，当 T 为单循环时，则 $T^k = \iota$ 的最小正整数解为 T 的循环长度 l

对置换的整幂运算 T^n 感觉用快速幂 $O(n \log k)$ 就行（其实是因为论文中的算法没看懂

对置换的分数幂运算（开方）分两种情况：

循环长度和指数互质：

题目

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:wangzai_milk:wzx27:combinatorial_mathematics:permutaitongroup&rev=1590673702

Last update: 2020/05/28 21:48

