

题目链接:<https://projecteuler.net/problem=216>

## 题意

求 $2 \leq n \leq 5e7$ 有多少个 $n$ 满足 $t(n)=2n^2-1$ 是个质数

## 题解

先令 $t[i]=2i^2-1$

从 $2$ 开始枚举，用类似埃式筛的思想，如果 $t[i] > 1$ 则令 $t[i+k \times t[i]] /= t[i], t[-i+k \times t[i]] /= t[i]$ 如果 $t[i]=2i^2-1$ 则答案个数加一

上述算法的正确性需要证明几个关于 $t(n)=2n^2-1$ 的性质:

1、若 $p \mid t(n)$ 则 $p \mid t(n+kp)$ 且 $p \mid t(-n+kp)$

证明: 
$$t(n+p)-t(n) = 2(n+p)^2-2n^2 = 2p(2n+p)$$

若 $p \mid t(n)$ 又因为 $p \mid (t(n+p)-t(n))$ 所以有 $p \mid t(n+p)$ 从而有 $p \mid t(n+kp)$

$p \mid t(-n+kp)$ 同理

2、在上述算法过程中，枚举到 $i$ 时， $t[i]$ 要么等于 $1$ 要么是一个质数

证明：

假设 $2, 3, \dots, i-1$ 都满足该性质

对于 $i$ 反设 $t[i]$ 可以分解为多个质数相乘 $t[i]=p_1 \dots p_k; (k > 1)$ 记最小的质数为 $p$

若 $p < i$ 则一定被 $t[i-p]$ 筛过，矛盾

若 $p = i$ 显然 $i \nmid 2i^2-1$ 矛盾

若 $i < p < 2i$ 若 $p = i+1$ 显然 $p \nmid 2i^2-1$ 否则 $i+1 \mid p \mid 2i^2-1$ 则一定被 $t[-i+p]$ 筛过，矛盾

若 $p \geq 2i$ 则存在 $q \geq p$ 使得 $pq \mid 2i^2-1$ 但 $pq \geq 4i^2$ 矛盾

证毕

## 代码

```
rep(i, 2, n) a[i] = 2LL*i*i-1;
rep(i, 2, n){
    if(a[i]==2LL*i*i-1) ans++;
    if(a[i]>1){
        ll p = a[i];
        for(ll j=i+p; j<=n; j+=p){
            if(a[j]%p==0) a[j]/=p;
        }
        for(ll j=-i; j<=n; j+=p){
```

Last update: 2020-2021:teams:wangzai\_milk:wzx27:pe:201 [https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:wangzai\\_milk:wzx27:pe:201](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:wangzai_milk:wzx27:pe:201)  
2020/05/25 17:05

```
        if(j>0 && a[j]%p==0) a[j]/=p;
    }
}
```

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: [https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:wangzai\\_milk:wzx27:pe:201](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:wangzai_milk:wzx27:pe:201)

Last update: **2020/05/25 17:05**

