

题目链接:<https://projecteuler.net/problem=216>

题意

求 $2 \leq n \leq 5 \times 10^7$ 有多少个 n 满足 $t(n) = 2n^2 - 1$ 是个质数

题解

先令 $t[i] = 2i^2 - 1$

从 2 开始枚举，用类似埃式筛的思想，如果 $t[i] > 1$ 则令 $t[i+k \times t[i]] = t[i], t[-i+k \times t[i]] = t[i]$ 如果 $t[i] = 2i^2 - 1$ 则答案个数加一

上述算法的正确性需要证明几个关于 $t(n) = 2n^2 - 1$ 的性质：

1、若 $p \mid t(n)$ 则 $p \mid t(n+kp)$ 且 $p \mid t(-n+kp)$

证明：

$$\begin{aligned} t(n+p)-t(n) &= 2(n+p)^2 - 2n^2 \\ &= 2p(2n+p) \end{aligned}$$

 若 $p \mid t(n)$ 又因为 $p \mid (t(n+p)-t(n))$ 所以有 $p \mid t(n+p)$ 从而有 $p \mid t(n+kp)$
 $p \mid t(-n+kp)$ 同理

2、在上述算法过程中，枚举到 i 时， $t[i]$ 要么等于 1 要么是一个质数

证明：

假设 $2, 3, \dots, i-1$ 都满足该性质

对于 i 反设 $t[i]$ 可以分解为多个质数相乘 $t[i] = p_1 \dots p_k$; ($k > 1$)记最小的质数为 p

若 $p \mid t[i]$ 则一定被 $t[i-p]$ 筛过，矛盾。若 $p == i$ 显然 $i \mid 2i^2 - 1$ 矛盾。若 $i < p$

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:wangzai_milk:wzx27:pe:201&rev=1590396853

Last update: 2020/05/25 16:54

