题目链接:https://projecteuler.net/problem=216

题意

求#2\le n \le 5e7#□有多少个n满足$t(n)=2n^2-1$是个质数

题解

先令$t[i]=2i^2-1$

从2开始枚举，用类似埃式筛的思想，如果$t[i]\gt 1$□则令$t[i+k\times t[i]] /= t[i],t[-i+k\times t[i]] /= t[i]$□如果$t[i]=2i^2-1$□则答案个数加一

上述算法的正确性需要证明几个关于$t(n)=2n^2-1$的性质:

1、若$p\mid t(n)$□则$p|mid t(n+kp)且p\mid t(-n+kp)$

证明: $$ \begin{aligned} t(n+p)-t(n) & =2(n+p)^2-2n^2 \\ & =2p(2n+p) \\ \end{aligned} $$ 若$p\mid t(n)$□又因为$p\mid (t(n+p)-t(n))$□所以有$p\mid t(n+p)$□从而有$p\mid t(n+kp)$

$p\mid t(-n+kp)$同理

2、在上述算法过程中，枚举到i时，$t[i]$要么等于1要么是一个质数

证明：

假设$2,3,..,i-1$都满足该性质

对于i□反设$t[i]$可以分解为多个质数相乘□$t[i]=p_1,..,p_k\; (k>1)$□记最小的质数为p

若$p\lt i$□则一定被$t[i-p]$筛过，矛盾

若$p==i$□显然$i\nmid 2i^2-1$□矛盾

若$i\lt p \lt 2i$□若$p=i+1$□显然$p|nmid 2i^2-1$□否则$i+1\lt p \lt 2i$则一定被$t[-i+p]$筛过，矛盾

若$p\ge 2i$□则存在$q\ge p$□使得$pq \mid 2i^2-1$□但$pq\ge 4i$□矛盾

证毕