

题目链接:<https://projecteuler.net/problem=216>

## 题意

求  $\#2 \leq n \leq 5e7$  有多少个  $n$  满足  $t(n) = 2n^2 - 1$  是个质数

## 题解

先令  $t[i] = 2i^2 - 1$

从  $2$  开始枚举，用类似埃式筛的思想，如果  $t[i] > 1$  则令  $t[i+k \times t[i]] \neq t[i], t[-i+k \times t[i]] \neq t[i]$  如果  $t[i] = 2i^2 - 1$  则答案个数加一

上述算法的正确性需要证明几个关于  $t(n) = 2n^2 - 1$  的性质:

1、若  $p \mid t(n)$  则  $p \mid t(n+kp)$  且  $p \mid t(-n+kp)$

证明: 
$$t(n+p) - t(n) = 2(n+p)^2 - 2n^2 = 2p(2n+p)$$

若  $p \mid t(n)$  又因为  $p \mid (t(n+p) - t(n))$  所以有  $p \mid t(n+p)$  从而有  $p \mid t(n+kp)$

$p \mid t(-n+kp)$  同理

2、在上述算法过程中，枚举到  $i$  时， $t[i]$  要么等于  $1$  要么是一个质数

证明：

假设  $2, 3, \dots, i-1$  都满足该性质

对于  $i$  反设  $t[i]$  可以分解为多个质数相乘  $t[i] = p_1 \dots p_k; (k > 1)$  记最小的质数为  $p$

若  $p \mid t(i)$  则一定被  $t[i-p]$  筛过，矛盾

若  $p = i$  显然  $i \nmid 2i^2 - 1$  矛盾

若  $i \mid p \mid t(i)$  若  $p = i+1$  显然  $p \nmid 2i^2 - 1$  否则  $i+1 \mid p \mid t(i)$  则一定被  $t[-i+p]$  筛过，矛盾

若  $p \geq 2i$  则存在  $q \geq p$  使得  $pq \mid 2i^2 - 1$  但  $pq \geq 4i$  矛盾

证毕

From:  
<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:  
[https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:wangzai\\_milk:wzx27:pe:201&rev=1590397082](https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:wangzai_milk:wzx27:pe:201&rev=1590397082)

Last update: 2020/05/25 16:58