题目链接:https://projecteuler.net/problem=216

题意

求#2\le n \le 5e7#，有多少个n满足$t(n)=2n^2-1$是个质数

题解

先令$t[i]=2i^2-1$

从2开始枚举，用类似埃式筛的思想，如果$t[i]\gt 1$，则令$t[i+k\times t[i]] /= t[i],t[-i+k\times t[i]] /= t[i]$，如果$t[i]=2i^2-1$，则答案个数加一

上述算法的正确性需要证明几个关于$t(n)=2n^2-1$的性质:

1、若$p\mid t(n)$，则$p|mid t(n+kp)且p\mid t(-n+kp)$

证明: $$ \begin{aligned} t(n+p)-t(n) & =2(n+p)^2-2n^2 \\ & =2p(2n+p) \\ \end{aligned} $$ 若$p\mid t(n)$，又因为$p\mid (t(n+p)-t(n))$，所以有$p\mid t(n+p)$，从而有$p\mid t(n+kp)$

$p\mid t(-n+kp)$同理

2、在上述算法过程中，枚举到i时，$t[i]$要么等于1要么是一个质数

证明：

假设$2,3,..,i-1$都满足该性质

对于i，反设$t[i]$可以分解为多个质数相乘，$t[i]=p_1,..,p_k\; (k>1)$，记最小的质数为p

若$p\lt i$，则一定被$t[i-p]$筛过，矛盾

若$p==i$，显然$i\nmid 2i^2-1$，矛盾

若$i\lt p \lt 2i$，若$p=i+1$，显然$p|nmid 2i^2-1$，否则$i+1\lt p \lt 2i$则一定被$t[-i+p]$筛过，矛盾

若$p\ge 2i$，则存在$q\ge p$，使得$pq \mid 2i^2-1$，但$pq\ge 4i^2$，矛盾

证毕