

题目链接:<https://projecteuler.net/problem=216>

题意

求 $2 \leq n \leq 5e7$ 有多少个 n 满足 $t(n) = 2n^2 - 1$ 是个质数

题解

先令 $t[i] = 2i^2 - 1$

从 2 开始枚举，用类似埃式筛的思想，如果 $t[i] > 1$ 则令 $t[i+k \times t[i]] /= t[i], t[-i+k \times t[i]] /= t[i]$ 如果 $t[i] = 2i^2 - 1$ 则答案个数加一

上述算法的正确性需要证明几个关于 $t(n) = 2n^2 - 1$ 的性质:

1、若 $p \mid t(n)$ 则 $p \mid t(n+kp)$ 且 $p \mid t(-n+kp)$

证明:
$$t(n+p) - t(n) = 2(n+p)^2 - 2n^2 = 2p(2n+p)$$

若 $p \mid t(n)$ 又因为 $p \mid (t(n+p) - t(n))$ 所以有 $p \mid t(n+p)$ 从而有 $p \mid t(n+kp)$

$p \mid t(-n+kp)$ 同理

2、在上述算法过程中，枚举到 i 时， $t[i]$ 要么等于 1 要么是一个质数

证明：

假设 $2, 3, \dots, i-1$ 都满足该性质

对于 i 反设 $t[i]$ 可以分解为多个质数相乘 $t[i] = p_1 \dots p_k; (k > 1)$ 记最小的质数为 p

若 $p \mid i$ 则一定被 $t[i-p]$ 筛过，矛盾

若 $p = i$ 显然 $i \nmid 2i^2 - 1$ 矛盾

若 $i \mid p \mid 2i$ 若 $p = i+1$ 显然 $p \nmid 2i^2 - 1$ 否则 $i+1 \mid p \mid 2i$ 则一定被 $t[-i+p]$ 筛过，矛盾

若 $p \geq 2i$ 则存在 $q \geq p$ 使得 $pq \mid 2i^2 - 1$ 但 $pq \geq 4i^2$ 矛盾

证毕

From: <https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link: https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2020-2021:teams:wangzai_milk:wzx27:pe:201&rev=1590397102

Last update: 2020/05/25 16:58