

Fly

题意

给定一个长度为 n 的数列 a_i 和 k 个限制形如 (b_i, c_i) 和一个数 m 求有多少个数列 x_i 满足 $\sum_{i=1}^n x_i \leq m$ 且 $x_i \cdot 2^{c_i} = 0$

$n \leq 4 \cdot 10^4, m \leq 10^{18}, k \leq 5 \cdot 10^3, \sum a_i \leq 4 \cdot 10^4, b_i \leq n, c_i < 60, \text{MOD} = 998244353$

题解

我们发现限制是对于每个 x_i 的二进制位进行的，所以考虑直接将 a_i 分成 $\sum_{k=0}^{59} a_i \cdot 2^k$ 其中 $y_{i,k}$ 表示 $a_i \cdot 2^k$ 是否被选择了。这样我们就把问题转化成了 $\sum_{k=0}^{59} y_{i,k}$ 这共 $60n$ 个物品，其中有 k 个物品被强制不能选择时，选择的物品的总和不超过 m 的方案数。

注意到 m 非常大，所以直接做背包是没有前途的。这时候我们注意到 $a_i \cdot 2^k$ 这样的物品是不会影响到总和的二进制最低的 k 位的，所以我们考虑按照 2^0 到 2^{59} 这个顺序来对这些物品进行 DP

我们定义 $dp_{i,j,0/1}$ 表示已经选完 2^i 一类的物品，总和 S 满足 $\lfloor \frac{S}{2^{i+1}} \rfloor = j$ 且 $S \% 2^i$ 是否严格大于 $m \% 2^i$ 的方案数。

考虑先分析一下第二维的范围，我们假设 $\sum a_i = SA$ 已经选完 2^k 的物品时 $\sum_{i=0}^k 2^i SA \leq 2^{k+1} SA$ 所以第二维最多也就是 SA 同时我们也可以发现这时候直接 DP 还是没啥前途。

考虑对于每一类物品一起算，利用生成函数显然就是 $\prod_{i=1}^n \sum_{j=0}^{\infty} \binom{a_i}{j} x^{ja_i}$ 进行变化可以变为 $\prod_{i=1}^n \sum_{j=0}^{\infty} \binom{a_i}{j} x^{ja_i} (1+x^{2^k})^{-j}$ 我们考虑将其中的 x^{2^k} 变为 x 因为对于每个 2^k 我们可以发现剩余的部分是完全相同的。前面的部分设为 $g(x) = \prod_{i=1}^n (1+x^{a_i})$ 后面的部分我们考虑对每个 2^k 我们做一次反向的背包来得到最终的式子，设其为 $G(x)$

我们注意到，对于 $[x^i]G(x)$ 和 $dp_{k-1,j,0/1}$ 我们可以得到新的第二维是 $\lfloor \frac{2^k i + 2^k j + Y}{2^{k+1}} \rfloor = \lfloor \frac{i+j}{2} \rfloor$ 其中 Y 是上一次的余数。第三维我们可以按照前面的 0 到 $k-1$ 位是否严格大于 m 来进行讨论，严格大于则当前位只需要大于等于就可以大于，否则当前位要严格大于。

考虑对于每个 2^k 得到 $G(x)$ 之后怎么结合 dp_{k-1} 来得到 dp_k 我们分两类来转移 $dp_{k, \lfloor \frac{X}{2} \rfloor, [X \& 1 > m_k]} = \sum_{i+j=X} [x^i]G(x) \cdot dp_{k-1,j,0}$ 和 $dp_{k, \lfloor \frac{X}{2} \rfloor, [X \& 1 \geq m_k]} = \sum_{i+j=X} [x^i]G(x) \cdot dp_{k-1,j,1}$ 这两类分别做一次卷积即可。

最后我们的答案就是 $dp_{59,0,0}$ 我实现略微卡常。

From:
<https://wiki.cvbbacm.com/> - **CVBB ACM Team**

Permanent link:
https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2022-2023:teams:eager_to_embrace_the_seniors_thigh:1h&rev=1660211942 

Last update: **2022/08/11 17:59**