

Easy Counting Problem

题意

1 到 w 这 w 种数每种至少在字符串中出现 $c_1, c_2, \dots, c_w$ 次, q 次询问, 每次给出一个 n 求长度恰好为 n 的字符串有多少种。

$w \leq 10, q \leq 300, n \leq 10^7, \sum c_i \leq 5 \cdot 10^4$

题解

考虑对每种数构建指数生成函数。对于数 i 显然有 $F_i = \sum_{j \geq c_i} \frac{x^j}{j!}$

然后对于每个询问的答案就是 $ans = n! [x^n] \prod_{i=1}^w F_i$

我们注意到这个题 $\sum c_i$ 很小但是 n 很大, 考虑将 F_i 写成 $F_i = \sum_{j \geq c_i} \frac{x^j}{j!} = e^x \sum_{j=0}^{c_i-1} \frac{x^j}{j!}$

那么答案就可以写作 $ans = n! [x^n] \prod_{i=1}^w (e^x \sum_{j=0}^{c_i-1} \frac{x^j}{j!})$

考虑变化后面的式子为 $\sum_{i=0}^w \{e^{ix} (-1)^{w-i} (\sum_{|S|=w-i} \prod_{j \in S} \sum_{k=0}^{c_j-1} \frac{x^k}{k!})\}$ 定义 $f_{i,j}$ 表示前 i 种数里面选了 j 个的 $\sum_{k=0}^{c_h-1} \frac{x^k}{k!}$ 的乘积的和, 此时式子可以写作 $\sum_{i=0}^w \{e^{ix} (-1)^{w-i} f_{w,w-i}\}$

求 f 的时候考虑按照背包DP的方式求解, 每次转移的时候做一次卷积。

最后对于每个询问的答案就是 $ans = n! \sum_{i=0}^w \{ \sum_{k=0}^{\sum c_i} [x^{n-k}] e^{(w-i)x} \} \frac{(w-i)^{n-k}}{(n-k)!}$ 其中 $[x^{n-k}] e^{(w-i)x} = \frac{(w-i)^{n-k}}{(n-k)!}$

From:

<https://wiki.cvbbacm.com/> - CVBB ACM Team

Permanent link:

https://wiki.cvbbacm.com/doku.php?id=2022-2023:teams:eager_to_embrace_the_seniors_thigh:4c

Last update: 2022/08/09 08:50